



**Titre:** Simulation numérique de l'écoulement tridimensionnel turbulent  
Title: dans un parc éolien

**Auteur:** Christophe Leclerc  
Author:

**Date:** 1998

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Leclerc, C. (1998). Simulation numérique de l'écoulement tridimensionnel turbulent dans un parc éolien [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/6907/>  
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/6907/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:**  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SIMULATION NUMÉRIQUE DE L'ÉCOULEMENT  
TRIDIMENSIONNEL TURBULENT DANS UN PARC ÉOLIEN

LECLERC CHRISTOPHE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
SEPTEMBRE 1998



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-38690-2

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

**SIMULATION NUMÉRIQUE DE L'ÉCOULEMENT  
TRIDIMENSIONNEL TURBULENT DANS UN PARC ÉOLIEN**

présenté par: LECLERC CHRISTOPHE

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

est soumis au jury d'examen constitué de :

M. PRUDHOMME Michel, Ph.D., président-rapporteur

M. PARASCHIVOIU Ion, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. MASSON Christian, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. BALIGA Rabi B. R., Ph.D., membre

À la mémoire de mon grand-père,  
Louis Sibuet.

---

## REMERCIEMENTS

Pour m'avoir fait confiance depuis maintenant quatre ans dans différentes activités de recherche, pour m'avoir encadré comme directeur de recherche pendant la maîtrise, je voudrais d'abord exprimer toute ma reconnaissance à M. Paraschivoiu.

Pendant ces deux années, j'ai pu travailler en étroite collaboration avec M. Masson, maintenant professeur à l'É.T.S., et codirecteur de ma maîtrise. Je lui suis reconnaissant de m'avoir transmis l'habitus du chercheur. De plus, sans la formation et les connaissances transmises par M. Masson, ce projet n'aurait pas la forme qu'il a aujourd'hui.

Je remercie particulièrement Idriss Ammara, dont le travail a servi de point de départ à cette recherche, pour son sens du travail en équipe et toute l'aide prodiguée.

Je tiens aussi à remercier les employés de l'école qui m'ont souvent rendu service et avec qui il était toujours agréable de collaborer. Merci Alain, Daniel, Chantal, Nathalie, Manon, Danielle, Gisèle.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers le CRSNG, qui m'a assuré un support financier durant 2 ans sous la forme d'une bourse d'étude.

Merci à tous mes amis, pour les discussions, les encouragements, les coups de main, les rires, et pour beaucoup d'autres choses. Merci Stéphane, Pascal, Marc, Dan, François, Valérie, Alexei, Patric, Stéphane, Marc, Charles, Tayeb, Azzedine, Philippe, René, Emmanuel, Sébastien, Yves, Siamak.

Je garde ma dernière pensée pour ma famille, mes parents et mes deux soeurs, qui m'ont permis, par leurs encouragements, leurs conseils et leur amour, de mener à bien ce travail.

## RÉSUMÉ

La génération d'électricité à partir d'énergies renouvelables, et particulièrement d'origine éolienne, se présente comme une alternative aux ressources fossiles désormais envisageable en raison de la rentabilité et de la fiabilité, maintenant acquises, de ces systèmes.

Lors de la conception d'un parc éolien, la disposition des éoliennes sur le terrain peut influencer de façon sensible le prix de revient du kWh, en raison des interférences aérodynamiques qui interviennent entre les machines.

Pour analyser et proposer des solutions optimales à ce problème, il est donc proposé de simuler numériquement l'écoulement dans un parc éolien. La première étape de ce projet a consisté à modéliser les effets du rotor de l'éolienne sur l'écoulement. Dans cette formulation, les équations de Navier-Stokes sont utilisées pour décrire l'écoulement laminaire et stationnaire autour d'une éolienne. L'éolienne est représentée par une distribution surfacique de forces dont l'intensité est déterminée par la théorie de l'élément de pale.

Pour étendre cette modélisation à l'étude d'éoliennes en situation d'interférence, il est proposé, dans ce mémoire, d'analyser et de modéliser les contributions de la turbulence dans l'écoulement particulier d'un parc éolien. Généralement, la turbulence dans le sillage d'une éolienne est reliée à quatre origines: la turbulence atmosphérique, la turbulence produite par le cisaillement du champ de vitesse, la turbulence générée par les pales de l'éolienne et la turbulence produite par la stratification de température. Nous supposons que la couche de surface terrestre est en conditions thermiques neutres, la dernière contribution mentionnée ne sera donc pas prise en compte. Le modèle à deux équations  $k$ - $\epsilon$ , modifié pour les écoulements atmosphériques, est proposé pour modéliser les effets de la turbulence sur l'écoulement. Trois termes additionnels, provenant de la modélisation de l'éolienne, sont mis en

évidence. De ces trois termes, un seul terme significatif est proposé à l'équation d'énergie cinétique turbulente. Ce terme constitue une fraction de l'énergie cinétique transmise aux tourbillons de bouts de pales, l'autre fraction étant dissipée sous forme thermique.

Deux méthodes numériques aux éléments finis/volumes de contrôle ont été utilisées pour résoudre le problème mathématique dans ses formes axisymétrique et tridimensionnelle.

La validité du modèle  $k-\epsilon$  à l'étude de sillages est d'abord étudiée en l'appliquant à l'écoulement en aval d'un sphéroïde. Les méthodes axisymétrique et tridimensionnelle sont ensuite utilisées pour résoudre l'écoulement autour de l'éolienne MOD-0A dans différentes conditions atmosphériques et d'opération. L'effet du terme supplémentaire proposé à l'équation d'énergie cinétique turbulente est analysé. Quand toute l'énergie attribuable aux tourbillons de bouts de pales est injectée dans l'équation d'énergie cinétique turbulente, il est démontré que cette opération conduit à une surprédiction des niveaux de viscosité turbulente dans le sillage. En faisant appel aux observations expérimentales qui mettent en évidence la nature particulière et fortement dissipative des tourbillons de bouts de pales, il est donc proposé, pour l'éolienne MOD-0A, de considérer que l'énergie cinétique transmise aux tourbillons de bouts de pales est entièrement dissipée sous forme d'énergie thermique, et qu'elle ne contribue pas à la turbulence. Les comparaisons entre les mesures expérimentales et les prédictions numériques montrent que le modèle proposé est adéquat pour la prédiction des propriétés en vitesse du sillage. De plus, plusieurs caractéristiques typiques du sillage d'une éolienne sont reproduites (augmentation du niveau d'énergie cinétique turbulente, entraînement du sillage vers le bas). Les deux méthodes sont finalement utilisées pour analyser le cas de deux éoliennes positionnées l'une derrière l'autre, et les résultats obtenus indiquent une chute de performance réaliste, en même temps que l'importance de prendre en compte les



effets elliptiques qui interviennent dans l'écoulement autour de plusieurs éoliennes.

Ces simulations permettent aussi de comparer les résultats produits par les méthodes numériques axisymétrique et tridimensionnelle et de constater la précision de la méthode axisymétrique, malgré les hypothèses qui la justifient. Pour des problèmes dont le caractère n'est pas purement tridimensionnel, la méthode axisymétrique reste donc une méthode pratique, avec un coût de calcul peu élevé.

## ABSTRACT

Electricity generation from renewable resources, and particularly from the wind, is considered today as a competitive and necessary alternative to fossil resources.

When designing a wind farm, the relative positioning of the wind turbines inside the cluster can influence the cost of energy produced by the wind plant because of the aerodynamic interferences that occur between the turbines.

It is therefore proposed in this work to use computational fluid dynamics for the analysis of the turbulent flow around a dense arrangement of wind turbines. The first contribution towards this goal has dealt with the representation of the turbines inside the flow. The three-dimensional, steady-state, Navier-Stokes equations are used to describe the laminar flow around a turbine. The rotor of the wind turbine is modeled by surface forces, determined from blade element theory.

To further extend this model to the analysis of the turbulence effects on the flow, the two-equation  $k$ - $\epsilon$  model is used for the closure of the time-averaged Navier-Stokes equations. Atmospheric, wake shear-generated, blade-generated and buoyancy-induced turbulence are the four major contributions to turbulence in the wake of a wind turbine. It is therefore believed, in the case an atmospheric surface layer in neutral thermal conditions, that the  $k$ - $\epsilon$  model, modified for atmospheric flows, can handle and reproduce the turbulence effects in the flow around a wind turbine. Furthermore, a new term is added to the turbulent kinetic energy equation to take into account the contribution of the blade tip vortices to turbulence. This term is taken to be a fraction of the kinetic energy transmitted to the blade tip vortices by the flow, while the rest of this energy is considered to be dissipated into thermal energy.

Two control volume finite element methods have been used to solve the mathematical model in its axisymmetrical and three-dimensional form.

The applicability of the  $k$ - $\epsilon$  model to turbulent wakes has first been studied for the prediction of the turbulent wake behind a body of revolution. The two methods have then been applied to wind turbines in different atmospheric and operating conditions. The effect of the added term to the turbulent kinetic energy equation is analysed. When all the kinetic energy attributed to blade tip vortices is injected into the turbulent kinetic energy equation, it is proven that this assumption leads to an overprediction of the eddy viscosity levels in the wake of a stand alone wind turbine. Noting the particular nature of blade tip vortices on wind turbines, which have been observed to be strongly dissipative, it is proposed, for the case of the MOD-0A wind turbine, to consider that the kinetic energy of blade tip vortices is totally dissipated into heat, and does not contribute to turbulence. Comparisons between predicted and measured wake velocities for the case of the MOD-0A wind turbine show the adequacy of the proposed method for the prediction of the wake velocities. Furthermore, qualitative agreement with observations is obtained for gross wake characteristics, regarding the turbulent kinetic energy levels, or the tendency of wind turbine wakes to move downwards. Finally, the axisymmetric and the three-dimensional methods are both applied to the case of two turbines one behind another, and realistic performance degradation is found, while the importance of elliptic effects in wind park flows is stressed out.

Comparisons between the results produced by the axisymmetric and three-dimensional methods show the precision of the axisymmetric method, despite the hypothesis on which it is based. For problems that are not purely three-dimensional, the axisymmetric method can therefore be considered as a useful method with a low computing cost.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>DÉDICACE</b> . . . . .	iv
<b>REMERCIEMENTS</b> . . . . .	v
<b>RÉSUMÉ</b> . . . . .	vi
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	ix
<b>TABLE DES MATIÈRES</b> . . . . .	xi
<b>LISTE DES FIGURES</b> . . . . .	xiv
<b>LISTE DES TABLEAUX</b> . . . . .	xviii
<b>LISTE DES SYMBOLES</b> . . . . .	xix
 <b>CHAPITRE I: Introduction</b> . . . . .	 1
1.1 Préambule . . . . .	1
1.2 Principe de fonctionnement d'une éolienne . . . . .	2
1.3 Objectifs et motivations . . . . .	3
1.4 Plan du mémoire . . . . .	5
 <b>CHAPITRE II: Description du problème</b> . . . . .	 7
2.1 Couche limite terrestre et stabilité . . . . .	7
2.2 Caractéristiques du sillage d'une éolienne . . . . .	9
2.3 Revue bibliographique . . . . .	14
 <b>CHAPITRE III: Modèle mathématique</b> . . . . .	 17
3.1 Équations de transport . . . . .	17
3.1.1 Équations du mouvement . . . . .	17
3.1.2 Décomposition de Reynolds . . . . .	19

3.1.3	Équations de l'énergie cinétique turbulente moyenne et de sa dissipation . . . . .	21
3.2	Propriétés de la couche de surface terrestre en conditions thermiques neutres . . . . .	23
3.3	Modèles de fermeture . . . . .	26
3.3.1	Représentation de l'éolienne . . . . .	27
3.3.2	Modèle de turbulence . . . . .	32
3.3.2.1	Les différentes approches pour modéliser la turbulence . . . . .	32
3.3.2.2	Hypothèse de Boussinesq . . . . .	33
3.3.2.3	Le modèle $k-\epsilon$ . . . . .	36
3.3.2.4	Contribution des tourbillons de bouts de pales . . . . .	39
3.3.2.5	Modélisation des termes dûs aux forces instantanées . . . . .	42
3.4	Résumé du modèle mathématique . . . . .	44
3.5	Spécialisation du modèle mathématique: développement d'une formulation axisymétrique . . . . .	46
<b>CHAPITRE IV: Modélisation numérique . . . . .</b>		<b>49</b>
4.1	Description de la méthode . . . . .	49
4.2	Modèle axisymétrique . . . . .	51
4.2.1	Description du domaine . . . . .	51
4.2.2	Expressions des coefficients de diffusion et des termes sources . . . . .	52
4.2.2.1	Équations de quantité de mouvement . . . . .	52
4.2.2.2	Équations d'énergie cinétique turbulente et de dissipation . . . . .	55
4.2.3	Conditions aux frontières . . . . .	56
4.3	Modèle tridimensionnel . . . . .	58
4.3.1	Description du domaine . . . . .	58
4.3.2	Expressions des coefficients de diffusion et des termes sources . . . . .	60
4.3.2.1	Équations de quantité de mouvement . . . . .	60

4.3.2.2	Équations d'énergie cinétique turbulente et de dissipation	60
4.3.3	Conditions aux frontières . . . . .	61
<b>CHAPITRE V:</b>	<b>Résultats</b> . . . . .	<b>64</b>
5.1	Validation du modèle: sillage axisymétrique . . . . .	64
5.2	Formulation axisymétrique: résultats . . . . .	68
5.2.1	Modélisation de l'éolienne MOD-0A . . . . .	68
5.2.2	Analyse de la contribution des tourbillons de bouts de pales au bilan d'énergie cinétique turbulente . . . . .	69
5.2.3	Discussion des résultats produits par la formulation . . . . .	77
5.2.4	Effets de la turbulence sur la puissance mécanique . . . . .	78
5.2.5	Application de la méthode à un problème d'interférence entre deux éoliennes MOD-0A . . . . .	80
5.3	Formulation tridimensionnelle: résultats . . . . .	81
5.3.1	Modélisation de l'éolienne MOD-0A . . . . .	82
5.3.2	Simulations numériques des expérimentations de Doran et al. . .	87
5.3.3	Cas d'interférences entre deux éoliennes . . . . .	87
<b>CHAPITRE VI:</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>91</b>
6.1	Résumé du mémoire . . . . .	91
6.2	Principales contributions du mémoire . . . . .	94
6.3	Recommandations et suggestions pour les futurs développements du projet	96
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	. . . . .	<b>98</b>

## LISTE DES FIGURES

1.1	Principaux éléments d'une éolienne à axe horizontal . . . . .	3
2.1	Caractéristiques du sillage d'une éolienne . . . . .	10
2.2	Origines de la turbulence dans le sillage d'une éolienne . . . . .	12
3.1	Représentation de l'écoulement incident . . . . .	24
3.2	Paramètres géométriques d'une éolienne . . . . .	28
3.3	Analyse du bilan énergétique dans l'écoulement . . . . .	41
4.1	Section longitudinale du domaine axisymétrique . . . . .	52
4.2	Domaine de calcul et topologie du maillage . . . . .	59
5.1	Déficit de vitesse à l'axe en fonction de la position axiale, $\frac{x_0}{D} = 4$	66
5.2	Distribution radiale du déficit de vitesse à l'axe pour différentes stations axiales . . . . .	66
5.3	Distribution d'énergie cinétique turbulente pour $\frac{x}{D} = 6$ . . . . .	66
5.4	Distribution d'énergie cinétique turbulente pour $\frac{x}{D} = 9$ . . . . .	66
5.5	Distribution d'énergie cinétique turbulente pour $\frac{x}{D} = 12$ . . . . .	67
5.6	Distribution d'énergie cinétique turbulente pour $\frac{x}{D} = 15$ . . . . .	67
5.7	Distribution d'énergie cinétique turbulente pour $\frac{x}{D} = 18$ . . . . .	67
5.8	Évolution du déficit axial de vitesse dans le sillage de l'éolienne MOD-0A . . . . .	70
5.9	Représentation schématique du positionnement des anémomètres et de l'éolienne lors des expérimentations de Doran et al. [34] .	72

5.10	Solution axisymétrique, $u_0(H) = 5.67m/s$ , angle d'incidence du vent = $23^\circ$ , $k_0(H) = 0.54m^2/s^2$ . . . . .	72
5.11	Solution axisymétrique, $u_0(H) = 6.43m/s$ , angle d'incidence du vent = $21^\circ$ , $k_0(H) = 0.7m^2/s^2$ . . . . .	72
5.12	Solution axisymétrique, $u_0(H) = 5.83m/s$ , angle d'incidence du vent = $37^\circ$ , $k_0(H) = 0.76m^2/s^2$ . . . . .	73
5.13	Solution axisymétrique, $u_0(H) = 7.44m/s$ , angle d'incidence du vent = $206^\circ$ , $k_0(H) = 1.8m^2/s^2$ . . . . .	73
5.14	Solution axisymétrique, $u_0(H) = 9.66m/s$ , angle d'incidence du vent = $192^\circ$ , $k_0(H) = 1.35m^2/s^2$ . . . . .	73
5.15	Solution axisymétrique, $u_0(H) = 8.17m/s$ , angle d'incidence du vent = $193^\circ$ , $k_0(H) = 2.9m^2/s^2$ . . . . .	73
5.16	Distribution des vitesses caractéristiques de la turbulence $k^{\frac{1}{2}}$ (en m/s) prédites par la formulation avec $\xi = 0$ . . . . .	74
5.17	Distribution des vitesses caractéristiques de la turbulence $k^{\frac{1}{2}}$ (en m/s) prédites par la formulation avec $\xi = 1$ . . . . .	74
5.18	Distribution des longueurs caractéristiques de la turbulence $\frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon}$ (en m) prédites par la formulation avec $\xi = 0$ . . . . .	74
5.19	Distribution des longueurs caractéristiques de la turbulence $\frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon}$ (en m) prédites par la formulation avec $\xi = 1$ . . . . .	74
5.20	Profils de déficits de vitesse adimensionnels $\frac{u_d}{u_0(H)}$ , $u_0(H)=8.05$ m/s . . . . .	78
5.21	Profils de pression (en Pa), $u_0(H)=8.05$ m/s . . . . .	78
5.22	Profils d'énergie cinétique turbulente (en $m^2/s^2$ ), $u_0(H)=8.05$ m/s . . . . .	79
5.23	Prédictions de puissance mécanique en situations turbulentes et non-turbulentes pour l'éolienne MOD-0A . . . . .	79



5.24	Performances de deux éoliennes MOD-0A l'une derrière l'autre	81
5.25	Comparaison de l'évolution du déficit axial de vitesse dans le sillage de l'éolienne MOD-0A prédite par les formulations axisymétrique et tridimensionnelle . . . . .	83
5.26	Profils de déficits de vitesse adimensionnels $\frac{u_d}{u_0(H)}$ dans le plan ( $y=0$ ), $u_0(H)=8.05$ m/s . . . . .	83
5.27	Profils de déficits de vitesse adimensionnels $\frac{u_d}{u_0(H)}$ dans le plan ( $z=H$ ), $u_0(H)=8.05$ m/s . . . . .	84
5.28	Profils de pression (en Pa) dans le plan ( $y=0$ ), $u_0(H)=8.05$ m/s	84
5.29	Distribution verticale de déficits de vitesse pour différentes positions axiales, $u_0(H)=8.05$ m/s . . . . .	85
5.30	Profils d'énergie cinétique turbulente (en $m^2/s^2$ ) dans le plan ( $x=0$ ), $u_0(H)=8.05$ m/s . . . . .	86
5.31	Profils d'énergie cinétique turbulente (en $m^2/s^2$ ) dans le plan ( $y=0$ ), $u_0(H)=8.05$ m/s . . . . .	86
5.32	Solution tridimensionnelle, $u_0(H) = 5.67m/s$ , angle d'incidence du vent = $23^\circ$ , $k_0(H) = 0.54m^2/s^2$ . . . . .	88
5.33	Solution tridimensionnelle, $u_0(H) = 6.43m/s$ , angle d'incidence du vent = $21^\circ$ , $k_0(H) = 0.7m^2/s^2$ . . . . .	88
5.34	Solution tridimensionnelle, $u_0(H) = 5.83m/s$ , angle d'incidence du vent = $37^\circ$ , $k_0(H) = 0.76m^2/s^2$ . . . . .	88
5.35	Solution tridimensionnelle, $u_0(H) = 7.44m/s$ , angle d'incidence du vent = $206^\circ$ , $k_0(H) = 1.8m^2/s^2$ . . . . .	88
5.36	Solution tridimensionnelle, $u_0(H) = 9.66m/s$ , angle d'incidence du vent = $192^\circ$ , $k_0(H) = 1.35m^2/s^2$ . . . . .	89
5.37	Solution tridimensionnelle, $u_0(H) = 8.17m/s$ , angle d'incidence du vent = $193^\circ$ , $k_0(H) = 2.9m^2/s^2$ . . . . .	89

- 5.38 Cas d'interférence entre deux éoliennes: profils de déficits de  
vitesse adimensionnels  $\frac{u_d}{u_0(H)}$  dans le plan ( $y=0$ ),  $u_0(H)=8.05$   
m/s . . . . . 90
- 5.39 Cas d'interférence entre deux éoliennes: profils de déficits de  
vitesse adimensionnels  $\frac{u_d}{u_0(H)}$  dans le plan ( $z=H$ ),  $u_0(H)=8.05$   
m/s . . . . . 90

## LISTE DES TABLEAUX

2.1	Importance relative des différentes sources de turbulence dans le sillage d'une éolienne . . . . .	12
3.1	Hauteurs de rugosité typiques . . . . .	26

## LISTE DES SYMBOLES

$A_I$	surface d'intégration des forces du rotor
$A$	surface délimitant un volume de contrôle $\mathcal{V}$
$B$	nombre de pales du rotor
$c$	corde
$C_D$	coefficient de traînée
$C_L$	coefficient de portance
$C_p$	chaleur spécifique à pression constante
$C_\mu, C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}$	constantes du modèle $k$ - $\epsilon$
$D$	diamètre du rotor
$f_x, f_y, f_z$	composantes des forces surfaciques exercées par le rotor selon $x, y, z$
$F_i^{ext \rightarrow VC}$	composantes des forces exercées par le rotor
$H$	hauteur du moyeu de l'éolienne
$k$	énergie cinétique turbulente par unité de masse
$K$	constante de Von Karman (0.4)
$l_t$	longueur caractéristique de la turbulence
$l_\theta, l_{\tilde{z}}$	forces tangentielles et axiales exercées par le rotor
$n_i$	composantes du vecteur normal pointant vers l'extérieur du volume de contrôle
$p$	pression
$p_{ref}$	pression de référence
$P_t$	production volumique d'énergie cinétique turbulente
$\mathcal{R}$	constante de l'air considéré comme un gaz parfait ( $287 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ )
$R$	rayon du rotor
$Re$	nombre de Reynolds
$R_H$	position radiale du début de pale
$S_\phi$	terme source associé à la variable dépendante $\phi$

$t$	temps
$t_{corr}$	facteur de correction combiné, $t_{corr} = t_H t_T$
$t_H$	facteur de correction du moyeu
$t_T$	facteur de correction du bout de pale
$T$	température
$u, v, w$	composantes de la vitesse moyenne selon $x, y, z$
$u_x, u_r, u_\theta$	composantes de la vitesse moyenne selon $x, r, \theta$
$u_d$	déficit de vitesse
$u_i$	composantes de la vitesse moyenne selon $x_i$
$u^*$	vitesse turbulente de friction
$U_n, U_t$	composantes normale et tangentielle de la vitesse relative $V_{rel}$
$v_t$	vitesse caractéristique de la turbulence
$V_{rel}$	vitesse relative de l'écoulement par rapport à la pale
$\mathcal{V}$	volume de contrôle
$\dot{W}_{A \rightarrow B}$	puissance échangée entre les systèmes A et B
$\dot{W}_{meca}$	puissance mécanique générée par l'éolienne
$x, z, y$	système de coordonnées cartésien
$x, r, \theta$	système de coordonnées cylindrique
$x_i$	système de coordonnées du repère de référence
$z_0$	hauteur de rugosité du terrain
$\alpha$	angle d'attaque
$\beta$	angle de vrillage de la pale
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker
$\epsilon$	dissipation d'énergie cinétique turbulente par unité de masse
$\gamma$	angle de conicité du rotor
$\Gamma_\phi$	coefficient de diffusion associé à la variable dépendante $\phi$
$\mu$	viscosité de l'air

$\mu_t$	viscosité turbulente
$\Omega$	vitesse de rotation du rotor
$\phi$	représente une des variables dépendantes
$\rho$	masse volumique de l'air
$\sigma$	variance des fluctuations de vitesse
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	constantes du modèle $k$ - $\epsilon$
$\tau_0$	contrainte en cisaillement exercée par le sol
$\tau_{ij}$	composantes du tenseur des contraintes turbulentes de Reynolds
$\theta_P$	température potentielle
$\sigma_{ij}$	composantes du tenseur des contraintes visqueuses

### **Indices inférieurs**

o	propriétés moyennes de l'écoulement incident
---	--

### **Indices supérieurs**

~	valeurs instantanées des propriétés de l'écoulement
'	différence entre les valeurs instantanées et moyennes
	des propriétés de l'écoulement
*	valeurs des propriétés moyennes de l'écoulement perturbé

## CHAPITRE I

### Introduction

#### 1.1 Préambule

Le rayonnement solaire et la rotation de notre planète produisent des différences de température et de pression sur la surface du globe qui se traduisent localement par la mise en mouvement de masses d'air, ou plus simplement, à l'échelle humaine, par la formation de vent. L'énergie concentrée dans ces masses d'air est exploitée depuis l'Antiquité (par exemple avec la Panémone de Perse) mais son développement s'est surtout accéléré au Moyen-Âge avec la construction de nombreux moulins à vent.

Au cours des deux derniers siècles, des moyens de production d'énergie plus performants tels que la machine à vapeur, le moteur à combustion interne, la turbine à gaz et la fission nucléaire ont dominé la scène de l'énergie au détriment des machines éoliennes. Mais la baisse des réserves mondiales d'hydrocarbures, la demande en énergie toujours croissante et les problèmes environnementaux sont autant de raisons qui participent à placer aujourd'hui l'énergie éolienne au coeur des préoccupations énergétiques de nombreux pays.

La capacité mondiale de production d'électricité d'origine éolienne est actuellement estimée à 6500 MW et des projections indiquent qu'elle atteindra 14000 MW en 2000. Bien qu'au Canada, seulement 21 MW soient présentement en opération, le potentiel canadien est évalué à 9200 MW [1].

Au Canada, pendant la décennie 1975-1985, plusieurs organisations fédérales et provinciales ont poursuivi d'importants travaux de recherche et de développement, principalement sur les éoliennes à axe vertical [2]. Ces travaux ont conduit à la conception, la fabrication, et l'installation d'éoliennes dans plusieurs régions du

Canada. Avec des résultats parfois décourageants, ces efforts ont néanmoins permis d'augmenter les connaissances sur le terrain pour des problèmes reliés, par exemple, au branchement de l'éolienne sur le réseau électrique ou aux conditions climatiques canadiennes.

Actuellement, les efforts de recherche financés par le Ministère de l'Énergie et des Ressources du Québec visent à favoriser la mise au point et la diffusion de nouvelles technologies de production et d'utilisation de l'énergie. C'est dans le cadre du programme d'aide au développement des technologies de l'énergie que s'inscrit ce travail de maîtrise.

## **1.2 Principe de fonctionnement d'une éolienne**

Un design typique d'éolienne à axe horizontal est représenté à la figure 1.1. La tour supporte la nacelle et les pales de la turbine et, dépendamment du type de turbine considérée, elle peut être placée soit en amont soit en aval des pales par rapport au sens de l'écoulement. Les pales de la machine ont un mouvement de rotation autour du moyeu de l'éolienne et extraient l'énergie cinétique du vent incident. Les profils utilisés sur une pale sont déterminés par des critères aérodynamiques et de structure, et ils sont assemblés entre le moyeu et le bout de la pale avec des angles de calage décroissant. Pour la plupart des éoliennes, l'énergie extraite du vent est transmise au générateur par l'intermédiaire d'une boîte de vitesse tandis que la vitesse de rotation de l'arbre est imposée par les caractéristiques du générateur et par le réseau distributeur d'électricité. Dans ce cas, la vitesse de rotation de la pale est constante. Toutefois, pour optimiser le rendement de l'éolienne à toutes les vitesses de vent, certaines éoliennes modernes fonctionnent à vitesse de rotation variable et le moyeu de l'éolienne est directement relié à la génératrice.

L'ensemble du système convertisseur d'énergie est finalement placé dans la nacelle, qui soutient aussi les dispositifs de freinage, de variation de l'angle de calage



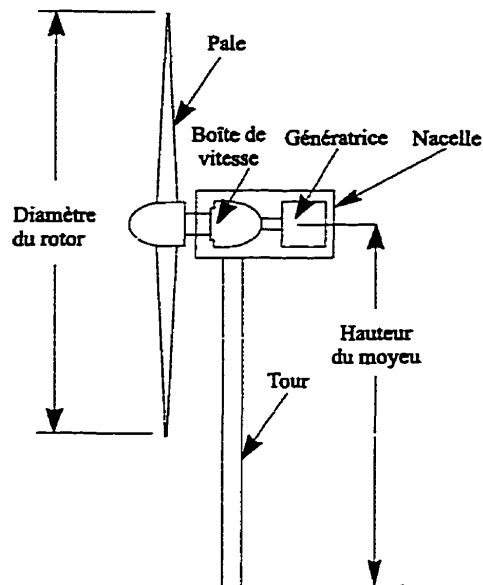


Figure 1.1 Principaux éléments d'une éolienne à axe horizontal

global de la pale, etc. Dans le cas où la tour est placée en amont des pales, la nacelle s'oriente et se stabilise naturellement par rapport au vent. Dans le cas où la tour est placée en aval des pales, un ensemble servomécanique permet de placer la nacelle parallèlement au vent.

Typiquement, une éolienne moderne produit une puissance nominale de 700 kW et fonctionne sur une plage de vitesse entre 5 et 15 m/s. Le diamètre de ses pales est de 30 m et le moyeu est placé à une hauteur voisine d'un diamètre et demi.

### 1.3 Objectifs et motivations

Pour des raisons économiques et pratiques, les éoliennes sont souvent placées en groupe sur un site donné et on parle alors de parc éolien ou de ferme éolienne. Les problèmes associés à un tel parc sont des problèmes d'interférences aérodynamiques: En effet, comme l'air incident perd de son énergie cinétique au passage d'une éolienne, la puissance générée par une autre éolienne située en aval sera plus faible

que celle de la première. Or, sur une surface occupable, il faut maximiser la puissance totale tout en minimisant les coûts de construction et d'entretien du parc pour produire de l'électricité à un coût intéressant. Comme de plus, il faut tenir compte des variations de vent en amplitude et en orientation, le problème qui consiste à optimiser l'arrangement des éoliennes devient rapidement très complexe.

Actuellement la stratégie utilisée fait appel à des arguments empiriques et les éoliennes sont alors placées par rangées, chaque rangée étant orientée perpendiculairement à la direction principale du vent. L'écart entre chaque rangée varie selon le type de machine, mais il est en général de six diamètres et à l'intérieur d'une rangée, l'espace latéral entre chaque éolienne est environ de trois diamètres.

C. Masson, dans le cadre du programme d'aide au développement des technologies de l'énergie, a proposé de simuler numériquement une ferme éolienne afin d'optimiser l'arrangement des machines entre elles. Ce projet est divisé en plusieurs étapes dont la première, réalisée conjointement par Masson et Ammara [3], consiste à modéliser la présence du rotor dans l'écoulement. Dans cette approche, les équations de Navier-Stokes sont résolues par une méthode aux éléments finis/volumes de contrôle (CVFEM) et l'éolienne est représentée par une distribution de forces externes dans les équations de quantité de mouvement. Ces forces sont évaluées en se basant sur la théorie de l'élément de pale et servent aussi au calcul de la puissance générée par la machine. La formulation utilisée permet à priori de solutionner le problème posé par des éoliennes isolées ou en groupe, dans des conditions atmosphériques stables ou instables, sur un terrain plat ou accidenté.

La deuxième étape de ce projet consiste à proposer un modèle mathématique adéquat pour la simulation des effets dûs à la turbulence dans l'écoulement. En effet, dans l'atmosphère, la moyenne des carrés des écarts entre la vitesse instantanée et la vitesse moyenne mesurées en un point est de l'ordre de 15% [4], ce qui a pour conséquence d'augmenter significativement les transferts de quantité de mouvement

à l'intérieur de l'écoulement. La turbulence joue par exemple un rôle majeur dans le sillage d'une éolienne en accélérant le retour des vitesses de l'air aux valeurs qu'elles prennent en amont de l'éolienne.

C'est l'objet de ce mémoire de présenter le travail effectué pour répondre aux exigences de cette deuxième étape. Il est à noter que ce travail s'inscrit directement dans la prolongation de celui de I. Ammara [5] et que pour plus de précision, le lecteur intéressé est vivement encouragé à consulter ce travail.

## 1.4 Plan du mémoire

Le chapitre 2 introduit tout d'abord aux difficultés de modélisation reliées au milieu atmosphérique et une revue des observations expérimentales et des modèles mathématiques déjà proposés est présentée.

Le modèle mathématique complet utilisé dans ce travail est décrit au chapitre 3. Dans ce modèle, les équations de Navier-Stokes moyennées dans le temps sont complétées par le modèle de turbulence à deux équations  $k - \epsilon$  [6]. Les caractéristiques de la sous-couche atmosphérique en conditions thermiques neutres sont explicitées. La représentation physique et mathématique des effets de l'éolienne sur l'écoulement est détaillée. Dans le cadre de modélisation choisi, des forces surfaciques sont distribuées sur la surface balayée par les pales de la machine. L'intensité de ces forces est déduite de la théorie de l'élément de pale, et pour introduire les effets dûs aux tourbillons de bouts de pales, l'approche de Prandtl est utilisée. L'étude des échanges énergétiques induits par la présence des tourbillons de bouts de pales montre que l'énergie cinétique transmise par l'écoulement aux tourbillons doit se répartir entre les bilans d'énergie cinétique turbulente et d'énergie thermique. Il est donc proposé d'introduire un nouveau terme dans l'équation d'énergie cinétique turbulente, dont les effets seront discutés ultérieurement.

Le chapitre 4 décrit la méthode numérique utilisée pour solutionner le problème

mathématique formulé au chapitre 3, le découpage du domaine et les conditions aux frontières. Les deux modèles numériques développés (axisymétrique et tridimensionnel) sont présentés et discutés.

Les résultats obtenus à l'aide de cette méthode sont présentés au chapitre 5. L'écoulement turbulent dans le sillage d'un sphéroïde est étudié pour valider le modèle proposé et des cas d'éoliennes isolées ou en groupe sont présentés. Les effets du terme supplémentaire dans l'équation d'énergie cinétique turbulente sont analysés et discutés.

Enfin, le chapitre 6 résume les conclusions du mémoire et expose quelques recommandations.

## CHAPITRE II

### Description du problème

Dans ce chapitre, le problème étudié est décrit pour mieux en comprendre la nature et justifier les hypothèses qui seront utilisées durant l'élaboration du modèle mathématique. En premier lieu, les caractéristiques de la couche atmosphérique dans laquelle opère une éolienne sont examinées. Les mesures et les observations du champ de vitesse ou du niveau de turbulence dans le sillage d'une éolienne sont ensuite passées en revue. Finalement, un examen bibliographique des modèles proposés pour étudier les interférences aérodynamiques entre éoliennes ou pour introduire les effets de la turbulence est présenté.

#### 2.1 Couche limite terrestre et stabilité

Toutes les informations données dans cette section sont extraites du livre "Atmospheric Turbulence" de H. A. Panofsky [4].

La couche limite planétaire se définit comme la zone de l'atmosphère dans laquelle les contraintes visqueuses de cisaillement sont encore fortes, et où des changements rapides de vitesse, de température et de concentration sont observés verticalement. D'avion, le sommet de cette couche correspond à la limite supérieure de visibilité réduite due aux poussières, fumées et gaz présents dans l'air. Les propriétés de cette zone sont en constant changement, en raison des variations du rayonnement solaire, de la présence de nuages, etc., si bien que la hauteur de la couche limite planétaire varie en fonction du moment de la journée.

Pour mieux comprendre le phénomène de la turbulence à travers la couche limite planétaire, il est utile de définir la température potentielle  $\theta_P$  qui correspond à la température qu'une parcelle d'air à température  $T$  et pression  $p$  aurait si elle

était ramenée isentropiquement à la pression de référence  $p_{ref}=1000$  mb. On a:

$$\theta_P = T \left( \frac{p_{ref}}{p} \right)^{\mathcal{R}/C_p} \quad (2.1)$$

En introduisant une perturbation dans les équations de quantité de mouvement et d'énergie, on peut alors montrer que si la température potentielle augmente avec l'altitude, les effets des forces d'Archimède contribuent à amortir et à diminuer l'énergie cinétique turbulente et rendent donc l'écoulement plus stable. Au contraire, une distribution décroissante de température potentielle selon la hauteur contribue à déstabiliser l'écoulement et à augmenter l'énergie cinétique turbulente. On parle dans le premier cas d'une stratification atmosphérique stable, et instable dans le deuxième cas. Si la température potentielle est constante à travers la couche limite planétaire, on parle d'une stratification neutre et dans ce cas, l'origine de la turbulence est purement mécanique, c'est à dire que la turbulence provient uniquement du frottement du sol et des cisaillements dans le champ de vitesse.

La nuit, l'atmosphère est stratifiée de façon stable mais cet état change le jour, au fur et à mesure que le soleil chauffe le sol et les premières couches de l'atmosphère, et dans la journée, dépendamment des conditions de vent et d'ensoleillement, l'atmosphère devient instable.

Obtenir des relations mathématiques générales pour différentes conditions de stabilité atmosphérique est une tâche difficile. Si l'on se restreint à la partie de la couche limite planétaire située juste au dessus de la surface terrestre, on peut poser comme hypothèse simplificatrice que les forces en cisaillement y sont constantes. Cette zone est appelée la couche de surface, ou encore la couche de cisaillement constant. Dans la journée et par vents forts (entre 5 et 15 m/s), la hauteur de cette couche est d'environ 100 m alors qu'elle est seulement de 10 m par vents faibles la nuit. Étant donné l'hypothèse de cisaillement constant, l'analogie avec la sous-couche visqueuse d'une couche limite est immédiate. On aura donc, dans cette

partie de l'atmosphère des relations décrivant le profil de vitesse, d'énergie cinétique turbulente et de viscosité tourbillonnaire, et ce, pour les trois conditions de stabilité.

Comme les éoliennes considérées dans ce mémoire n'ont pas une hauteur supérieure à 100 m, les relations valides dans la couche de surface seront utilisées. Par ailleurs, nous prendrons pour hypothèse une stratification atmosphérique neutre, surtout afin d'alléger le modèle mathématique d'une équation d'énergie thermique supplémentaire.

## 2.2 Caractéristiques du sillage d'une éolienne

Étant donné la nature extrêmement variable des conditions atmosphériques, il est difficile de procéder à des mesures sur le terrain et de vérifier leur répétabilité. Pour cette raison, de nombreuses recherches expérimentales de caractérisation du sillage d'une éolienne ont été réalisées dans des souffleries. L'éolienne étudiée est alors soit une maquette de l'éolienne originale, soit simplement un obstacle poreux ayant les mêmes propriétés de traînée que l'éolienne originale. La comparaison entre une éolienne et un obstacle poreux est limitée même si Vermeulen [7] note que les effets périodiques imposés par la rotation des pales disparaissent après une distance égale à 5 fois le diamètre du rotor. Cette limitation est imposée premièrement par l'absence de similitude dimensionnelle entre l'éolienne réelle et le montage expérimental et deuxièmement par l'impossibilité de reproduire la rotation du sillage avec un obstacle poreux [8]. Ce mouvement de rotation est en effet une conséquence du couple imposé par l'éolienne sur l'écoulement. L'utilisation de maquettes pour simuler une éolienne réelle est aussi contestable en ce qui concerne les aspects de similitude dimensionnelle. L'avantage majeur d'expériences en soufflerie réside dans le nombre de situations différentes dans lesquelles on peut placer l'éolienne (écoulement incident laminaire ou turbulent, vitesses de vent uniformes ou reproduisant les caractéristiques de la couche de surface) ainsi que dans le nombre d'expériences

réalisables dans un court délai (essais de plusieurs configurations, vitesses de rotation, vitesses de vent).

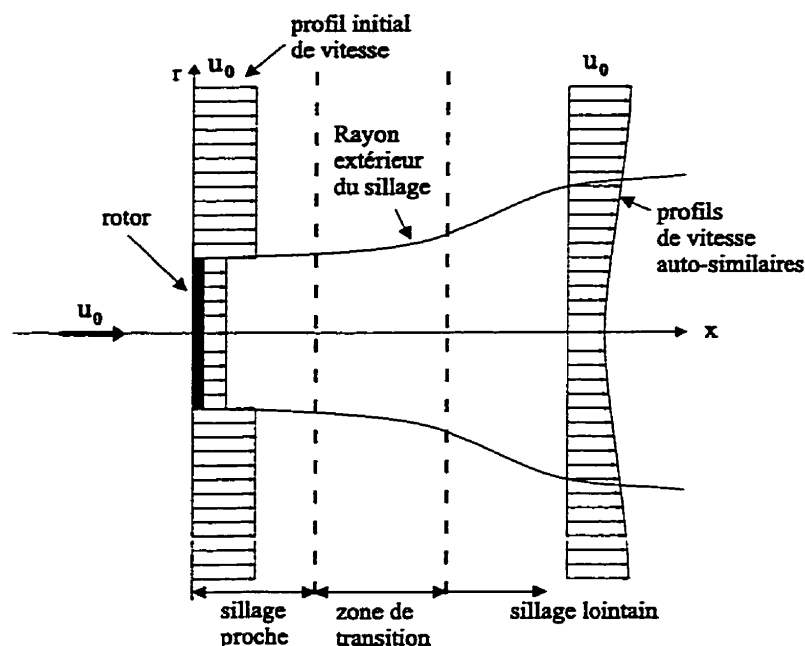


Figure 2.1 Caractéristiques du sillage d'une éolienne

Dans le cas d'une éolienne placée dans un écoulement uniforme, le sillage peut se décomposer en trois zones: le sillage proche, la zone de transition et le sillage lointain [9]. La figure 2.1 représente schématiquement la géométrie d'un tel sillage. Dans le sillage proche, on observe de forts gradients de pression, de vitesse et une hausse du niveau de turbulence. Après cette zone, la turbulence générée par la turbine se dissipe graduellement et seuls les effets de cisaillement et de turbulence ambiante influencent alors le développement du sillage. Dans le sillage lointain, aussi appelé région du sillage complètement développé, les profils de vitesse axiale sont essentiellement auto-similaires, c'est à dire que pour une position donnée en  $x$  (voir figure 2.1), le profil de vitesse ne dépend que de deux paramètres: le rayon du sillage et la vitesse à l'axe de symétrie. Ici, le rayon du sillage est défini comme la distance



entre la position où la vitesse vaut 99% de la vitesse à l'infini et l'axe de symétrie de l'écoulement. L'évolution de la vitesse à l'axe de symétrie est donc un paramètre important dans l'évolution d'un sillage et généralement, les expériences menées en laboratoire sur des maquettes placées dans un écoulement uniforme indiquent que le déficit adimensionnel de vitesse mesuré à l'axe,  $(u_0 - u_{r=0})/u_0$ , varie proportionnellement à  $(x/D)^{-1.25}$  [9, 10]. Dans le cas de mesures effectuées sur le terrain ou simulant les effets de sol en laboratoire, la pente logarithmique mesurée est aussi de -1.25 [11], -1.2 [12] ou -1.1 [13]. Par ailleurs, si l'on définit le centre du sillage dans un plan perpendiculaire à l'écoulement incident comme étant le point où le déficit de vitesse est maximum, il a été observé que la courbe reliant tous les centres d'un sillage réel descend en direction du sol avec un angle de un à deux degrés par rapport à l'horizontale [11, 14].

Les propriétés turbulentes du sillage d'une éolienne influencent significativement l'évolution du sillage. Ainsi, Alfredsson et al. [12] ont observé que plus le niveau de turbulence dans l'écoulement incident est important, plus les vitesses du sillage reviennent rapidement à leurs valeurs non-perturbées.

En pratique, on peut relier la présence de turbulence dans le sillage d'une éolienne à quatre origines [9, 13]:

1. Le niveau de turbulence ambiante (atmosphérique).
2. La production de turbulence par le travail des forces de cisaillement du champ de vitesse.
3. La turbulence générée (ou dissipée) par les pales, comme par exemple les tourbillons de bouts de pale.
4. La production ou dissipation d'énergie cinétique turbulente due à la stratification de température (influence du terme d'Archimède).

turbulence	région				
	sillage proche	zone de transition		sillage lointain	
		début	fin	début	fin
ambiante	++	++	++	++	++
travail des forces de cisaillement	++	++	+	+	—
turbine	++	+	—	—	—

Tableau 2.1 Importance relative des différentes sources de turbulence dans le sillage d'une éolienne

Expérimentalement, on observe que les effets (2) et (3) sont significatifs dans le sillage proche et la zone de transition, mais que dans le sillage lointain, l'effet (1) est dominant [9]. Le tableau 2.1 résume l'importance relative des différentes sources de turbulence dans chacune de ces zones (++: effet de premier ordre, +: second ordre, —: troisième ordre) et la figure 2.2 illustre l'évolution du profil de vitesse moyenne et de distribution d'énergie cinétique turbulente de l'amont vers l'aval d'une éolienne, en même temps que les différentes contributions à la turbulence dans l'écoulement.

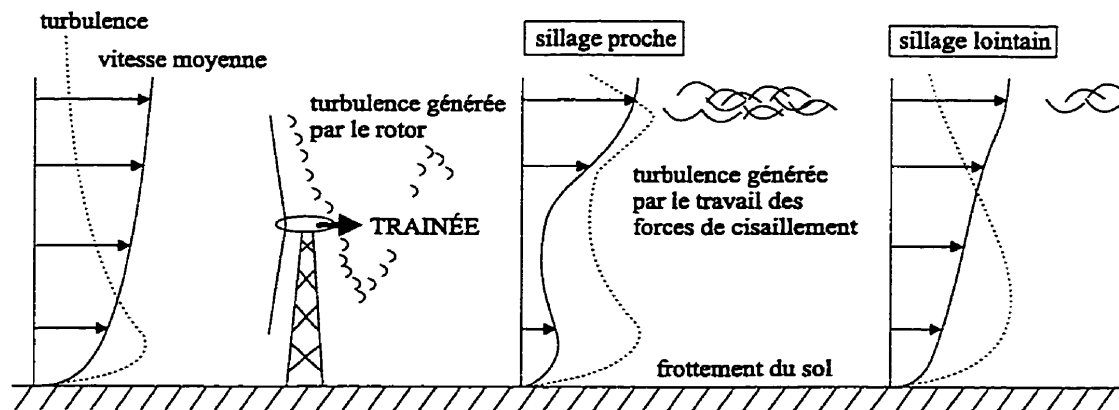


Figure 2.2 Origines de la turbulence dans le sillage d'une éolienne

Alfredsson et al. [12] ont observé que la structure des tourbillons de bouts de pale est très ordonnée et peu turbulente à proximité de la pale. Après deux diamètres, ces tourbillons (dont les plus importants sont ceux de début et de bout de pale) ne sont plus observables. Dans leurs travaux, Högström et al. [13] notent le caractère fortement énergétique et dissipatif des tourbillons de bouts de pale. Leurs

nombreuses mesures expérimentales mettent en évidence le caractère anisotrope de la turbulence ainsi qu'une augmentation, dans le sillage proche du rotor, du niveau énergétique des fluctuations turbulentes égale à plus de deux fois le niveau de turbulence mesuré dans l'écoulement incident. Deux pics de turbulence sont aussi mis en évidence sur le périmètre du cercle balayé par les pales, à l'intersection du plan de symétrie du rotor (qui est le plan orienté parallèlement à l'écoulement passant par la tour de l'éolienne). De plus, les profils de turbulence exhibent une quasi-symétrie par rapport à ce plan, le manque de symétrie étant attribuable à l'effet de rotation du sillage [13]. Quant aux effets de la stratification de température sur la production de turbulence, Högström et al. remarquent que ces effets sont non-négligeables seulement à proximité du rotor [13].

Un dernier effet de la turbulence concerne la performance en puissance d'une éolienne. Une courbe de puissance reporte la puissance mécanique générée par le rotor en fonction de la vitesse moyenne mesurée à hauteur du moyeu dans l'écoulement incident. En échelonnant ces courbes en fonction du niveau de turbulence atmosphérique ambiante, Elliott et al. [15] ont remarqué qu'à vitesse de vent égale, la puissance générée est plus grande quand le niveau de turbulence est plus élevé. Théoriquement, si l'on fait l'hypothèse que la puissance varie proportionnellement au cube de la vitesse (ce qui est raisonnable compte tenu de certaines hypothèses [1]), cet accroissement peut s'exprimer selon la formule:

$$P = P(u_0) \left[ 1 + 3 \left( \frac{\sigma}{u_0} \right)^2 \right] \quad (2.2)$$

Où  $u_0$  correspond à la valeur de la vitesse moyenne mesurée à hauteur de moyeu dans l'écoulement incident,  $\sigma$  est la variance des fluctuations de vitesse dans l'écoulement incident mesurées à la même hauteur ( $\sigma^2 = \overline{(\tilde{u}_i - u_{0,i})^2}$ ) et  $P(u_0)$  représente la puissance générée par le rotor dans des conditions idéales où  $\sigma = 0$ . Il faut noter que cette formule est obtenue en considérant que la puissance générée par l'éolienne réagit instantanément aux variations de vitesse, ce qui reste à évaluer. L'intérêt de cette

approche est de fixer, plus que de prédire, une limite supérieure à l'accroissement de puissance causé par la turbulence.

De plus, Elliott fait remarquer que cette augmentation disparaît si l'on reporte la puissance en fonction de la vitesse moyenne calculée sur la surface du rotor, le profil vertical de vitesse étant en fait influencé par les conditions de turbulence atmosphérique.

### 2.3 Revue bibliographique

Les précédents chapitres ont défini la nature de l'écoulement considéré. En plus d'être tridimensionnel et instationnaire, le problème se densifie en raison de la complexité associée aux écoulements atmosphériques et aux structures turbulentes ambiantes ou générées par la présence de l'éolienne. Bien qu'une solution numérique tenant compte de tout ces aspects soit théoriquement possible, d'un point de vue pratique, c'est à dire en terme de temps de calcul et de ressources informatiques, elle n'est pas envisageable pour l'instant. Néanmoins, pour proposer des solutions satisfaisantes, plusieurs chercheurs ont choisi de simplifier le problème considéré.

Ainsi, Templin [16] a proposé en 1974 un modèle simple et efficace pour calculer l'effet du positionnement relatif des éoliennes sur la performance en puissance d'un parc. Dans son analyse, les éoliennes sont représentées par une distribution continue de rugosité et la distribution verticale des vitesses de l'écoulement est supposée logarithmique. L'influence des éoliennes sur l'écoulement est déterminée en égalisant la différence de quantité de mouvement dans le champ de vitesse entre l'écoulement incident et en aval des machines avec leur traînée aérodynamique. Les données en traînée des machines sont tirées de mesures expérimentales. Une telle analyse est cependant restreinte à un parc composé d'une infinité de machines, si bien que l'espacement minimal prédit par cette théorie devrait être considéré comme une limite supérieure [17].

S'inspirant des études effectuées sur les jets libres, Lissaman [10] suggère dans ses travaux de représenter le sillage d'une éolienne en le divisant en 3 régions (déjà décrites dans la section précédente): le sillage proche, la zone de transition et le sillage lointain. À chacune de ces régions correspond un profil particulier de vitesse dont le niveau est déterminé en supposant que la différence de quantité de mouvement entre l'amont et l'aval de l'éolienne reste constante dans le sillage. Les deux paramètres principaux de ce modèle sont le rayon du sillage et la vitesse de l'écoulement le long de l'axe de rotation du rotor. Les effets de la turbulence d'origine atmosphérique ou produite par le travail en cisaillement du champ de vitesse sont pris en compte dans la formule décrivant l'accroissement du rayon du sillage. Pour l'analyse d'éoliennes situées à proximité les unes des autres, l'hypothèse utilisée consiste à superposer les sillages de chaque turbine, c'est à dire à additionner entre eux les déficits en vitesse dans les parties communes à deux ou plusieurs sillages. Cette dernière hypothèse suppose donc négligeables les effets non-linéaires et d'interférences entre éoliennes.

Plus récemment, Ainslie [18], Crespo et al. [19] et Liu et al. [20] ont proposé de solutionner les équations de Navier-Stokes pour simuler numériquement le sillage d'une éolienne. Dans sa formulation, Ainslie utilise un modèle algébrique de viscosité tourbillonnaire prenant en compte la turbulence atmosphérique et celle induite par le travail des forces de cisaillement. Un tel modèle suppose néanmoins l'équilibre entre la production et la dissipation de turbulence, or cette hypothèse n'est pas valide dans la région du sillage proche où la production excède largement la dissipation. Pour pallier à ce problème, Ainslie propose de multiplier la viscosité tourbillonnaire par une fonction filtre dont la forme est déterminée empiriquement.

Pour prendre en compte les effets de la turbulence sur l'écoulement, Crespo et al. [19] choisissent d'utiliser le modèle à deux équations  $k - \epsilon$  de Jones et Launder [6].

Dans les formulations de Crespo et al. et d'Ainslie, l'effort est concentré sur l'étude aérodynamique du sillage d'une éolienne isolée. En ce sens, leurs calculs se limitent à la zone du sillage et l'influence de l'éolienne sur l'écoulement n'est pas modélisée. L'étude de la performance en puissance d'un parc éolien n'est donc pas possible.

Liu et al. [20] remédient à cet aspect en s'inspirant de la théorie du disque de Froude (appelé aussi disque actuateur) qui consiste à représenter l'éolienne comme une discontinuité en pression. Cependant, dans leur analyse, seule la turbulence d'origine atmosphérique est prise en compte. Cette dernière hypothèse, si elle est justifiable dans le sillage lointain de la machine, n'est pas corroborée par les mesures expérimentales dès que l'on considère les régions voisines de l'éolienne, ce qui a pour conséquence de sous-estimer le retour des propriétés du sillage à leurs valeurs non-perturbées.

## CHAPITRE III

### Modèle mathématique

Le modèle mathématique utilisé pour représenter le problème d'une ou plusieurs éoliennes placées dans des conditions atmosphériques neutres est formulé dans ce chapitre. Tout d'abord, les équations de la mécanique des fluides incompressibles, valables pour des écoulements turbulents et non-turbulents, sont présentées. Ces équations sont moyennées dans le temps et cette opération introduit des nouvelles inconnues au problème dont la modélisation est décrite dans la deuxième partie de ce chapitre. De plus, les relations décrivant les forces imprimées à l'écoulement par l'éolienne sont aussi présentées dans cette partie.

### 3.1 Équations de transport

#### 3.1.1 Équations du mouvement

Dans le cadre de la mécanique des fluides newtoniens, les équations du mouvement sont obtenues en appliquant les principes de conservation de masse et de quantité de mouvement à un volume de contrôle à l'intérieur du fluide. Désignons par  $\mathcal{V}$  ce volume, par  $\mathcal{A}$  sa surface et par  $n_i$  le vecteur de norme unitaire orienté extérieurement à  $\mathcal{V}$  et normal à la surface élémentaire  $d\mathcal{A}$ . Les équations de transport sont alors (exprimées en notation tensorielle):

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}} \rho \tilde{u}_j n_j d\mathcal{A} = 0 \quad (3.1)$$

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}} \rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j n_j d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} \sigma_{ji} n_j d\mathcal{A} + \tilde{F}_i^{ext. \rightarrow VC} \quad (3.2)$$

$\tilde{u}_i$  représente le vecteur vitesse instantané,  $\sigma_{ij}$  le tenseur des contraintes et  $\tilde{F}_i^{ext. \rightarrow VC}$  l'ensemble des forces extérieures instantanées (autres que la gravité) qui sont appliquées sur le volume de contrôle. En pratique, cette force représente l'influence

du rotor sur l'écoulement et sa forme précise est présentée à la troisième section de ce chapitre. Pour l'instant, cette forme est indéterminée et par souci de généralité, nous conserverons la représentation intégrale des équations du mouvement au cours de notre développement mathématique.

Le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  est décrit par la loi de comportement des fluides newtoniens:

$$\sigma_{ij} = -\tilde{p}\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (3.3)$$

où  $\tilde{p}$  correspond à la pression instantanée. Ici, le terme de gravité est inclu dans la redéfinition de la pression. Dans notre étude, nous considérons que le fluide est incompressible, c'est à dire de densité constante. Avec cette hypothèse, l'équation (3.1) devient:

$$\int_{\mathcal{A}} \tilde{u}_j n_j d\mathcal{A} = 0 \quad (3.4)$$

Comme ce résultat est vrai indépendamment du choix du volume de contrôle, en faisant appel au théorème de la divergence, on trouve:

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (3.5)$$

Ce qui revient à dire que le champ de vitesse est de divergence nulle. L'équation (3.3) devient donc:

$$\sigma_{ij} = -\tilde{p}\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.6)$$

et en substituant l'équation (3.6) dans l'équation (3.2) on obtient le système d'équation suivant:

$$\int_{\mathcal{A}} \tilde{u}_j n_j d\mathcal{A} = 0 \quad (3.7)$$

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}} \rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j n_j d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} \left[ -\tilde{p}\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j d\mathcal{A} + \tilde{F}_i^{ext. \rightarrow VC} \quad (3.8)$$

Si l'on connaît la forme des forces extérieures, ce système fermé d'équations suffit à déterminer entièrement l'écoulement en tout point de l'espace et en tout temps,



aussi bien pour des écoulements laminaires que turbulents. Numériquement donc, la résolution d'un tel système pourrait être envisagée. Cependant, les amplitudes et les fréquences des oscillations turbulentes s'étendent sur un spectre si large que pour tenir compte de toutes ces perturbations, un maillage très fin serait nécessaire. Pour des problèmes élémentaires d'ingénierie, comme les ordres de grandeur des tourbillons turbulents varient entre 1 mm et 1 m, un minimum d'un milliard de points serait donc requis pour modéliser la géométrie d'un domaine tridimensionnel. Par ailleurs, la non-stationnarité des oscillations turbulentes rajoute une contrainte sur la division du temps, et les intervalles de temps choisis doivent être suffisamment petits pour pouvoir capturer les phénomènes instationnaires du mouvement. Un tel problème est bien trop exigeant par rapport à la capacité des ordinateurs actuels, par conséquent cette approche doit être abandonnée pour le problème qui nous préoccupe.

La méthode couramment utilisée pour l'étude d'écoulements turbulents consiste à moyennner dans le temps les équations du mouvement afin d'analyser l'évolution des quantités moyennes plutôt que l'évolution des quantités instantanées. Pour cela, plusieurs approches sont possibles, les plus courantes étant les méthodes statistiques de corrélation en un ou plusieurs points. Les méthodes de simulations des grandes échelles de la turbulence (large-eddy simulations) sont conceptuellement comparables, à la différence qu'elles reposent sur l'étude des propriétés spatiales moyennes de l'écoulement par l'introduction d'un filtre. La section suivante décrit l'approche statistique de corrélation en un point introduite par Reynolds.

### **3.1.2 Décomposition de Reynolds**

Pour des problèmes turbulents stationnaires, c'est à dire pour un écoulement où, en moyenne, les quantités ne varient pas dans le temps, on peut définir une longueur de temps  $T$  telle que chaque composante de la vitesse et la pression soient décomposables

en une composante instantanée et moyenne (la moyenne étant calculée sur le temps  $T$ ):

$$\tilde{u}_i = u_i + u'_i \quad (3.9)$$

$$\tilde{p} = p + p' \quad (3.10)$$

les composantes moyennes  $u_i$  et  $p$  sont définies par:

$$u_i = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \tilde{u}_i dt \quad (3.11)$$

$$p = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \tilde{p} dt \quad (3.12)$$

Si l'on substitue ces relations dans les équations (3.7) et (3.8) et que l'on moyenne dans le temps l'équation ainsi obtenue, on obtient les équations moyennées de continuité et de quantité de mouvement pour un écoulement incompressible, turbulent et stationnaire:

$$\int_{\mathcal{A}} u_j n_j d\mathcal{A} = 0 \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} \rho u_i u_j n_j d\mathcal{A} = & \int_{\mathcal{A}} \left[ -p \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j d\mathcal{A} \\ & - \int_{\mathcal{A}} \rho \overline{u'_i u'_j} n_j d\mathcal{A} + F_i^{ext. \rightarrow VC} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dans cette dernière équation,  $F_i^{ext. \rightarrow VC}$  représente la force moyennée dans le temps qui s'exerce sur le volume de contrôle  $\mathcal{V}$ , exprimée par:

$$F_i^{ext. \rightarrow VC} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \tilde{F}_i^{ext. \rightarrow VC} dt \quad (3.15)$$

Par rapport aux équations du mouvement instantané, un terme supplémentaire se rajoute quand on écrit le bilan de quantité de mouvement moyenné. Le terme  $\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ , qui est égal à la moyenne du produit des fluctuations de vitesse, constitue le tenseur des contraintes de Reynolds.

Cette manipulation a donc rajouté aux inconnues  $u_i$  et  $p$  neuf nouvelles inconnues  $\tau_{ij}$  (dont six sont indépendantes) sans rajouter d'équation supplémentaire.

L'évaluation de ces contraintes est au coeur du problème de modélisation de la turbulence que l'on appelle le problème de fermeture.

Il est à noter que nous avons déjà fait une hypothèse quant à la nature de notre problème en le supposant stationnaire. Quand nous aborderons le problème de la modélisation du rotor, nous verrons que cette hypothèse est justifiée.

### 3.1.3 Équations de l'énergie cinétique turbulente moyenne et de sa dissipation

Avant de préciser plus en détails les différentes approches possibles pour modéliser la turbulence et décrire la méthode retenue, nous présentons dans cette section deux équations essentielles à la compréhension du mécanisme de la turbulence. Définissons l'énergie cinétique turbulente moyenne par unité de masse par :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (3.16)$$

L'équation exacte de transport de  $k$  est alors dérivée en scalérisant les équations de Navier-Stokes (équation (3.8)) par la vitesse instantanée  $\tilde{u}_i$ , en moyennant dans le temps l'équation ainsi obtenue, et en lui retranchant l'équation de conservation de l'énergie cinétique moyenne. On trouve :

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{\mathcal{A}} \rho k u_j n_j d\mathcal{A}}_A &= \underbrace{- \int_{\mathcal{A}} \overline{u'_j \left( p' + \frac{1}{2} \rho u'_i u'_i \right) n_j d\mathcal{A}}}_B \\ &\quad + \underbrace{\int_{\mathcal{A}} \overline{\mu u'_i \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) n_j d\mathcal{A}}}_C \\ &\quad - \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\mathcal{V}}_D - \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \overline{\mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} d\mathcal{V}}}_E \\ &\quad + \underbrace{\left( \overline{F'_i{}^{ext. \rightarrow VC} u'_i} \right)}_F \end{aligned} \quad (3.17)$$

L'équation (3.17) représente un bilan entre: (A) le flux convectif d'énergie cinétique turbulente moyenne à travers la surface du volume de contrôle, (B) le flux d'énergie

du au travail moyen des fluctuations instantanées de pression et de vitesse s'exerçant sur cette même surface, (C) le flux d'énergie du au travail instantané des forces visqueuses, (D) le taux de production d'énergie cinétique turbulente dû au travail de déformation de l'écoulement moyen par les contraintes turbulentes de Reynolds, (E) le taux de dissipation visqueuse de l'énergie cinétique turbulente et (F) la contribution des fluctuations des forces externes à la production d'énergie cinétique turbulente. Généralement, les taux de production et de dissipation par unité de masse sont notés  $P_t$  et  $\epsilon$ , on a:

$$P_t = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.18)$$

$$\epsilon = \frac{\mu}{\rho} \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad (3.19)$$

La dissipation d'énergie cinétique turbulente s'effectue sous l'effet de la viscosité à des échelles de mouvement très petites par rapport à celles de l'écoulement moyen. On pose donc une hypothèse supplémentaire en supposant que cette dissipation s'effectue localement de manière isotropique. Dans ce cas, l'équation (3.19) s'écrit:

$$\epsilon = \frac{\mu}{\rho} \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} \quad (3.20)$$

L'équation de transport pour  $\epsilon$  est dérivée en différentiant par rapport à  $x_j$  la différence entre l'équation (3.2) et l'équation (3.8), en multipliant le résultat par  $\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}$  et en moyennant dans le temps. Cette équation est donnée par:

$$\begin{aligned} & \int_A \frac{1}{2} \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \right)^2} u_j n_j dA + \int_V \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_j} \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_j}{\partial x_l}} \\ & + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{2} \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \right)^2} \right\} dV = \\ & \int_V -\frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_l \partial x_i}} + \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \left( \frac{\partial^2 \partial u'_i}{\partial x_j^2 \partial x_l} \right)} dV + \left( \nu \overline{\frac{\partial F_i^{ext. \rightarrow VC}}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Parmi les différents termes de cette équation, on reconnaît que le premier terme de cette équation correspond à un terme de convection. Le dernier terme de cette

équation provient de l'influence des forces extérieures et sera discuté dans les sections suivantes.

En résumé, nous avons donc déterminé les principales relations qui décrivent le mouvement du fluide. Ce faisant, nous avons généré beaucoup de nouvelles inconnues en plus des composantes  $u_i$  de la vitesse moyenne et de la pression  $p$  moyenne. Par ailleurs, nous n'avons pas encore défini et modélisé l'action du rotor sur l'écoulement. Préciser ces forces et un modèle de turbulence fera donc l'objet de la troisième partie de ce chapitre. En deuxième partie, les relations de vitesse et de turbulence pour des conditions atmosphériques neutres sont explicitées afin de mieux cerner le problème étudié avant de le modéliser.

### 3.2 Propriétés de la couche de surface terrestre en conditions thermiques neutres

Pour représenter l'écoulement incident dans lequel est placé une éolienne ou un parc d'éoliennes, nous choisissons d'utiliser les propriétés observées dans les cent premiers mètres de la couche limite terrestre dans des conditions thermiques neutres et sur un terrain uniformément plat. De telles conditions correspondent approximativement aux stratifications stables de l'atmosphère pendant la nuit ou au début de la journée, particulièrement quand les vitesses de vent sont élevées. Toutes les expressions développées dans cette section sont tirées du livre "Atmospheric Turbulence" de Panofsky et Dutton [4].

Supposons en premier lieu que le vent souffle dans une seule direction que l'on indique par l'axe  $x$  (voir la figure 3.1). Pour des raisons de symétrie, les propriétés de l'écoulement ne dépendent pas de  $y$  et la composante de la vitesse moyenne mesurée selon ce même axe est nulle. De plus, on considère que les propriétés sont indépendantes de leur position en  $x$  et que la composante de la vitesse moyenne selon l'axe  $z$  est nulle. Dans le repère  $(x, y, z)$ , l'équation de quantité de mouvement

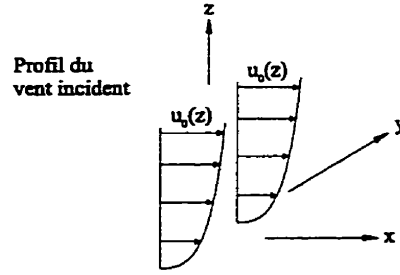


Figure 3.1 Représentation de l'écoulement incident

(voir équation (3.14)) dans la direction  $x$  s'écrit:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{uu}) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{uv}) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho \overline{uw}) \quad (3.22)$$

où  $u, v$  et  $w$  sont respectivement les composantes de la vitesse moyenne selon les axes  $x, y$  et  $z$ . D'après nos remarques précédentes, nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{\partial *}{\partial x} &= \frac{\partial *}{\partial y} = 0 \\ v &= w = 0 \end{aligned}$$

L'équation (3.22) devient donc:

$$0 = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} (\rho \overline{uw}) \quad (3.23)$$

En intégrant l'équation précédente par rapport à  $z$ , on trouve:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} - \rho \overline{uw} = C \quad (3.24)$$

où  $C$  est une constante. Dans ce type d'écoulement, il est suggéré de modéliser la contrainte de Reynolds  $\rho \overline{uw}$  en faisant appel au concept de viscosité tourbillonnaire. Le phénomène de turbulence est considéré analogue au phénomène d'agitation moléculaire qui est à l'origine de la viscosité et on pose:

$$-\rho \overline{uw} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.25)$$

$\mu_t$  est appelée la viscosité tourbillonnaire. L'équation (3.24) devient donc:

$$(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial z} = C = \tau_0 \quad (3.26)$$

où  $\tau_0$  est la contrainte en cisaillement, somme des effets visqueux et turbulents, exercée par une couche verticale de fluide sur une autre. Selon nos hypothèses, cette contrainte est donc constante dans la couche de surface en conditions thermiques neutres, et ce résultat est d'ailleurs confirmé par des mesures expérimentales [4].

La mécanique statistique appliquée au milieu moléculaire montre que la viscosité d'un fluide est égale au produit d'une vitesse et d'une longueur caractéristiques [21]. Par analogie, des mesures ont montré que dans l'écoulement considéré, la relation suivante peut être utilisée pour évaluer  $\mu_t$ .

$$\mu_{t0}(z) = \rho K u_* z \quad (3.27)$$

où  $K$  est la constante de Von Karman ( $K=0.4$ ) et  $u_*$  est la vitesse turbulente de friction donnée par:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (3.28)$$

En négligeant  $\mu$  par rapport à  $\mu_t$  et en intégrant l'équation (3.26) par rapport à  $z$ , on trouve le profil de vitesse moyenne:

$$u_0(z) = \frac{u_*}{K} \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) \quad (3.29)$$

où  $z_0$  correspond à la hauteur de rugosité du site sur lequel on se trouve. Cette hauteur représente la taille des tourbillons à la surface du site, ou encore la hauteur pour laquelle la vitesse moyenne s'annule. Elle dépend de plusieurs caractéristiques telles que les dimensions des obstacles au sol, leur espacement et leur forme. Le tableau 3.1 donne quelques valeurs typiques de hauteur de rugosité pour différents types de surfaces.

Pour trouver les caractéristiques turbulentes de l'écoulement atmosphérique étudié, il faut revenir dans un premier temps à l'équation (3.17) d'énergie cinétique

nature du sol	hauteur de rugosité (m)
eau ou glace (lisse)	$10^{-4}$
herbe tondue	$10^{-2}$
herbe longue, sol rocaillieux	0.05
terrain de pâturage	0.20
habitations de banlieue	0.6
forêts, villes	1 – 5

Tableau 3.1 Hauteurs de rugosité typiques

turbulente moyenne et constater que dans le cas présent, elle se réduit à:

$$P_t = \epsilon \quad (3.30)$$

or ici:

$$P_t = -\overline{uw} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*^3}{Kz} \quad (3.31)$$

la distribution de la fonction de dissipation d'énergie cinétique turbulente est donc donnée par la relation:

$$\epsilon_0(z) = \frac{u_*^3}{Kz} \quad (3.32)$$

Finalement, le profil d'énergie cinétique turbulente moyenne a été mesuré dans des conditions atmosphériques neutres par plusieurs expérimentateurs sur différents types de terrain, et en moyenne, leurs résultats s'accordent sur la relation [4]:

$$k_0(z) = 5.48u_*^2 \quad (3.33)$$

### 3.3 Modèles de fermeture

Cette section discute et formule les modèles retenus pour compléter les équations du mouvement précédemment formulées. La modélisation du rotor est d'abord décrite. Comme cette formulation est en fait le fruit du travail de maîtrise de I. Ammara [5], les relations sont présentées sans mettre l'accent sur leur justification. Par la suite, la modélisation de la turbulence est discutée et le modèle de turbulence choisi est présenté. Pour tenir en compte les effets des tourbillons de bouts de pales, un terme supplémentaire est ajouté à l'équation d'énergie cinétique turbulente moyenne.



### 3.3.1 Représentation de l'éolienne

À priori, la nature de l'écoulement autour d'une éolienne est tridimensionnel et instationnaire. Bien que Ekaterinaris et al. [22] aient récemment proposé un modèle capable de combiner ces deux aspects pour un problème simplifié, le problème instationnaire complet posé par une éolienne est encore hors de portée des capacités actuelles de modélisation. Pour cette raison, il est proposé de représenter l'action de l'éolienne dans un volume de contrôle donné par la force externe moyenne  $F_i^{ext. \rightarrow VC}$  (voir l'équation (3.14)) dont la valeur correspond à la force moyenne exercée par le rotor dans ce volume de contrôle au cours d'une période de rotation du rotor. Dans la suite de notre développement mathématique, le rotor est donc représenté par une surface continue à travers laquelle l'air est ralenti et communique son énergie au générateur de la machine. Cette approche a déjà été développée par Rajagopalan et al. [23, 24] dans le cas d'éoliennes à axe vertical.

Dans le cadre de ce projet, seuls les effets des pales sur l'écoulement sont modélisés. Les effets de la tour, qui peuvent être importants ne seront pas pris en compte. Le rotor est composé de  $B$  pales de longueur  $R$ , ayant un angle de conicité  $\gamma$  avec la verticale (voir figure 3.2a). Il est modélisé par la surface conique balayée par les pales ayant une base circulaire de rayon  $R \cos \gamma$ , délimitée par le cercle en pointillés de la figure 3.2b. La force moyennée dans le temps  $F_i^{ext. \rightarrow VC}$  est non-nulle seulement quand le volume de contrôle  $\mathcal{V}$ , pour qui les équations du mouvement (3.13) et (3.14) s'appliquent, intersecte cette surface conique. Pour un volume de contrôle rencontrant cette condition, tel qu'illustré à la figure 3.2a,  $F_i^{ext. \rightarrow VC}$  est évaluée en utilisant la théorie bidimensionnelle de l'élément de pale. La figure 3.2c présente les forces de portance et de traînée s'appliquant sur une section de pale positionnée à une distance  $r$  de l'axe de rotation du rotor.  $c$  et  $\beta$  sont respectivement la corde et l'angle de vrillage de la pale à cette section.

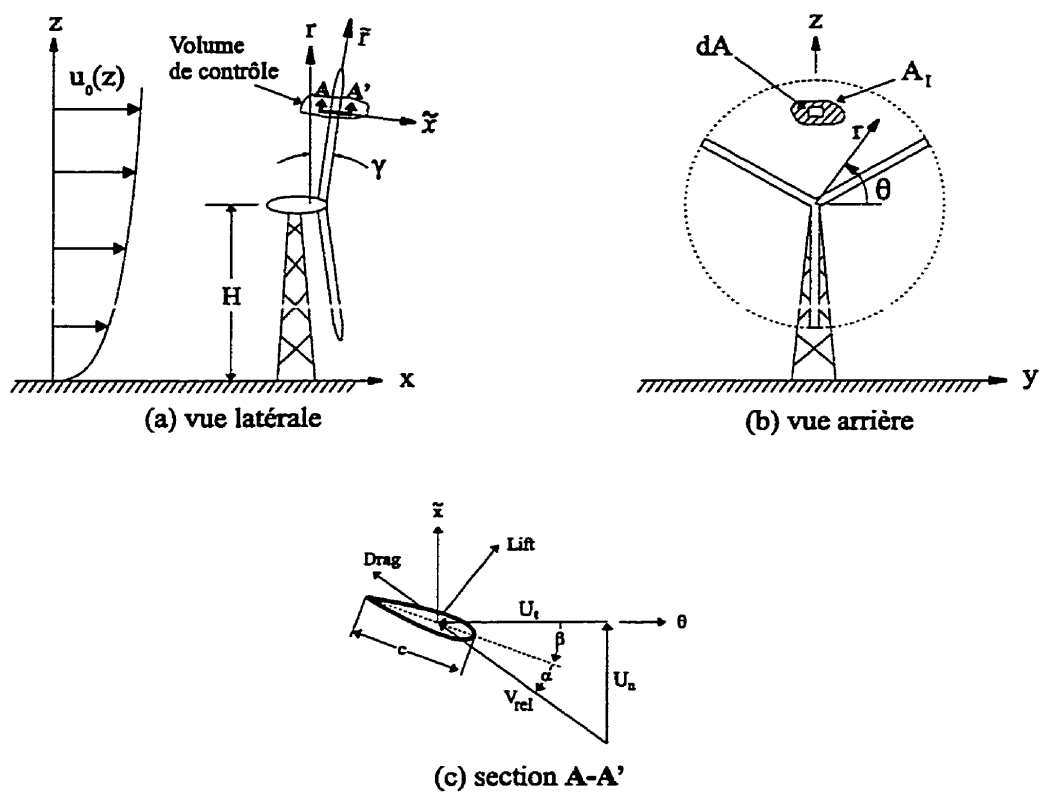


Figure 3.2 Paramètres géométriques d'une éolienne

Définissons les forces par unité de longueur:

$$l_{\tilde{x}} = \frac{\rho c V_{rel}}{2} [U_t C_L + U_n C_D] \quad (3.34)$$

$$l_{\theta} = \frac{\rho c V_{rel}}{2} [U_n C_L - U_t C_D] \quad (3.35)$$

où  $V_{rel} = \sqrt{U_n^2 + U_t^2}$ ,  $U_n = u \cos \gamma - [\cos \theta v + \sin \theta w] \sin \gamma$  et  $U_t = r\Omega - [w \cos \theta - v \sin \theta]$ .  $\Omega$  correspond à la vitesse de rotation du rotor.  $l_{\tilde{x}}$  et  $l_{\theta}$  représentent les composantes de la force exercée par le fluide sur le profil selon les axes  $\tilde{x}$  et  $\theta$ .

Désignons par  $A_I$  la surface définie par l'intersection de  $\mathcal{V}$  et de la surface conique représentant le rotor (voir figure 3.2b) et par  $dA$  un élément de surface élémentaire pris sur  $A_I$ . Les composantes cartésiennes de la force exercée par le rotor dans le volume  $\mathcal{V}$  sont trouvées en projetant les forces  $l_{\tilde{x}}$  et  $l_{\theta}$  sur les axes  $(x, y, z)$ , en intégrant dans l'espace, et en moyennant sur une période de rotation du rotor:

$$F_x^{ext. \rightarrow VC} = \int_{A_I} f_x dA \quad (3.36)$$

$$F_y^{ext. \rightarrow VC} = \int_{A_I} f_y dA \quad (3.37)$$

$$F_z^{ext. \rightarrow VC} = \int_{A_I} f_z dA \quad (3.38)$$

où  $f_x$ ,  $f_y$  et  $f_z$  correspondent aux composantes des forces surfaciques exercées par le rotor sur l'écoulement et définies par:

$$f_x = -\frac{B}{2\pi} \frac{l_{\tilde{x}}}{r} \cos \gamma \quad (3.39)$$

$$f_y = \frac{B}{2\pi} \frac{l_{\tilde{x}} \cos \theta \sin \gamma + l_{\theta} \sin \theta}{r} \quad (3.40)$$

$$f_z = \frac{B}{2\pi} \frac{l_{\tilde{x}} \sin \theta \sin \gamma - l_{\theta} \cos \theta}{r} \quad (3.41)$$

$C_L$  et  $C_D$  sont les coefficients statiques de portance et de traînée du profil aérodynamique définissant la pale. Ces coefficients sont en général fonction de l'angle d'attaque  $\alpha$  et du nombre de Reynolds local  $Re_c \left( = \frac{\rho V_{rel} c}{\mu} \right)$ . Leurs valeurs sont tirées de mesures expérimentales ou de simulations numériques. Il est à noter que

la turbulence présente dans l'écoulement incident peut aussi influencer la réponse aérodynamique du profil. Néanmoins, en l'absence de séparation de l'écoulement, Blackburn et al. [27] ont montré expérimentalement dans le cas d'un cylindre que le coefficient de portance reste indépendant des propriétés en turbulence de l'écoulement incident. Ce n'est pas le cas du coefficient de traînée, qui d'après les mesures de Pal [28] sur une plaque plane, est influencé par le niveau de turbulence de l'écoulement incident: une augmentation de 30% est mesurée dans le cas le plus turbulent. Il serait donc intéressant de mesurer ou quantifier la variation du coefficient de traînée en fonction du niveau de turbulence de l'écoulement incident pour les différents profils présents sur la pale, et d'en tenir compte au moment du calcul des forces. Ici cependant, en raison du manque de données, nous choisissons d'utiliser les caractéristiques en portance et traînée des profils telles que mesurées expérimentalement en soufflerie. Comme la réponse aérodynamique d'une éolienne est surtout influencée par la portance, ce choix n'est pas déterminant pour le reste du développement. Soulignons de plus que la turbulence qui influence le plus les propriétés aérodynamiques de la pale est celle dont les longueurs caractéristiques sont de taille comparables à la couche limite de la pale (affectant la portance et la traînée) ou de taille comparable au rayon du rotor (causant des variations de l'angle d'attaque). Cette partie de la turbulence ne compte que pour une faible partie de la turbulence totale, et les variations temporelles de l'angle d'attaque restent assez faibles pour une éolienne immergée dans un vent régulier. Les influences de la turbulence sur les propriétés aérodynamiques de la pale sont donc suffisamment petites pour ne pas en tenir compte.

Aux deux extrémités de la pale, c'est à dire proche du moyeu et du bout de pale, les différences de pression entre l'intrados et l'extrados du profil engendrent des mouvements d'air à l'origine des tourbillons de bouts de pale. Par conséquent, la valeur de la circulation autour du profil, c'est à dire de la portance, est réduite à ces

deux extrémités. Pour tenir compte de ces effets, la procédure généralement utilisée dans les modèles aérodynamiques à tubes de courant est de réduire la variation de quantité de mouvement axiale à travers le rotor d'un facteur de correction afin de traduire le fait qu'une partie de l'énergie cinétique de l'air est transmise aux tourbillons de bouts de pale [25]. Nous utilisons ici la formule de correction dérivée par Prandtl [26]:

$$t_{corr} = t_T t_H \quad (3.42)$$

$$t_T = \frac{2}{\pi} \arccos \left[ \exp \left( -B \frac{R \cos \gamma - r}{2r \sin(\alpha + \beta)} \right) \right] \quad (3.43)$$

$$t_H = \frac{2}{\pi} \arccos \left[ \exp \left( -B \frac{r - R_H \cos \gamma}{2R_H \cos \gamma \sin(\alpha + \beta)} \right) \right] \quad (3.44)$$

où  $R_H$  est la longueur mesurée le long de la pale entre l'axe de rotation et le début de la pale. Dans notre modèle, cette procédure est implantée de la façon suivante: la force produite par la portance autour du profil est augmentée de l'inverse du facteur de correction. Ce facteur est introduit dans les équations (3.34) et (3.35) en remplaçant  $C_L$  par  $C_L/t_{corr}$ . Comme la dérivation originale de Prandtl a été effectuée pour un écoulement non-visqueux, seul le coefficient de portance est affecté par le facteur de correction. La dérivation de Prandtl est néanmoins toujours valide pour l'écoulement qui nous intéresse étant donné que les effets visqueux sont surtout importants dans la couche limite développée sur le profil, et moins importants en dehors.

Dans la formule de la puissance mécanique générée par le rotor, le coefficient de portance ne doit pas être modifié. En effet, si l'introduction du facteur de correction dans les équations du mouvement a pour but indirect de modifier la variation de quantité de mouvement, l'évaluation de la puissance se réalise par contre directement à partir des forces exercées par l'air sur le rotor. On a donc:

$$\dot{W}_{Meca} = \frac{B}{2\pi} \int_{A_{Rotor}} \frac{l_\theta \Omega r}{r} dA$$

$$\frac{B}{2\pi} \int_{A_{Rotor}} \frac{\rho c V_{rel}}{2} [U_n C_L - U_t C_D] \Omega dA \quad (3.45)$$

où  $A_{Rotor}$  désigne l'aire conique balayée par les pales.

### 3.3.2 Modèle de turbulence

#### 3.3.2.1 Les différentes approches pour modéliser la turbulence

À l'origine, la turbulence est un phénomène chaotique qui, mathématiquement, prend naissance dans la non-linéarité des équations du mouvement. Par définition, un système chaotique est sensible aux conditions initiales auxquelles on le soumet, et pour peu qu'elles soient légèrement différentes, l'évolution du système dans le temps peut prendre des directions très éloignées. En mécanique des fluides, l'opération de décomposition de Reynolds (voir la section 3.1.2) nous permet de regarder le système d'une façon statistique et indépendante des conditions initiales. Dans cette formulation, nous nous heurtons cependant à l'évaluation des contraintes de Reynolds  $\tau_{ij} = -\rho \overline{u_i' u_j'}$  pour lesquelles nous n'avons pas de relation: c'est le problème de fermeture des équations moyennées du mouvement.

Pour résoudre ce problème, plusieurs approches sont envisageables et peuvent en fait être regroupées en trois catégories: les approches statistiques en un point, en plusieurs points, et les simulations des grandes échelles du mouvement turbulent (Large Eddy Simulations). Par approche statistique en un point, on sous-entend que l'on cherche à modéliser les fonctions de la forme  $\overline{u_i'(r, t) u_j'(r, t)}$  où  $r$  et  $t$  réfèrent respectivement à une position dans l'espace et un instant dans le temps. Les approches statistiques en plusieurs points ont comme objectif de modéliser les fonctions de la forme  $\overline{u_i'(r, t) u_j'(r + \zeta, t + \tau)}$  où  $\zeta$  et  $\tau$  expriment respectivement un déplacement dans l'espace et le temps par rapport au point  $(r, t)$ . Cette deuxième approche ne fera pas l'objet ultérieur de notre propos, mais il est important de signaler qu'elle permet d'obtenir de l'information sur la nature spectrale (dans l'espace et le temps) de la turbulence. En raison de la complexité de cette approche pour des calculs

pratiques d'ingénierie, nous choisissons d'écarter cette méthode.

Les modélisations des grandes échelles de la turbulence (Large Eddy Simulations) consistent à solutionner les équations instationnaires de Navier-Stokes pour prédire les détails de l'écoulement dont les longueurs caractéristiques sont de taille comparable à celles du maillage utilisé. Les tourbillons turbulents dont les longueurs caractéristiques sont plus petites sont décrits par un modèle de turbulence approprié. En somme, cette méthode se situe à mi-chemin entre les méthodes de moyennage dans le temps et de simulation directe, et pour un coût de calcul intéressant, elles permettent d'obtenir des informations détaillées sur l'écoulement. Cependant, le maillage utilisé pour représenter adéquatement un problème doit être très fin, et pour la plupart des problèmes typiques d'ingénierie, cette méthode est encore trop exigeante du point de vue calculatoire.

Le but de tout modèle de turbulence reposant sur l'approche statistique en un point consiste à donner une formulation capable de préciser la valeur des contraintes de Reynolds  $\tau_{ij}$ . Pour cela, tout modèle cherche à relier ces contraintes aux propriétés moyennes de l'écoulement à l'aide de relations dont la complexité peut varier de simples modèles algébriques à des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Les trois approches majeures disponibles sont: (1) les modèles de viscosité tourbillonnaire, (2) les modèles du second ordre et (3) les modèles algébriques de contrainte (Algebraic Stress Models).

### 3.3.2.2 Hypothèse de Boussinesq

Par analogie avec les interactions moléculaires, l'hypothèse formulée par Boussinesq consiste à relier les contraintes de Reynolds aux gradients de l'écoulement moyen et à faire apparaître ainsi un facteur de proportionnalité appelé viscosité turbulente  $\mu_t$ . On pose donc [21]:

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u_i' u_j'} = \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (3.46)$$

Selon la même analogie, la viscosité turbulente  $\mu_t$  est calculée à partir de la relation de Prandtl-Kolmogorov qui l'exprime comme un produit entre une longueur et une vitesse caractéristique des structures tourbillonnaires les plus larges [21]:

$$\mu_t \propto \rho v_t l_t \quad (3.47)$$

Dans le cas d'un modèle utilisant l'hypothèse de Boussinesq, le problème consiste donc à déterminer la distribution de viscosité turbulente dans l'écoulement.

La comparaison entre les interactions moléculaires et turbulentes est discutable d'un point de vue physique: les échelles des deux phénomènes sont très différentes, et si la viscosité moléculaire est une propriété du fluide, les contraintes de Reynolds sont plutôt fonction du mouvement. Cette faiblesse de l'hypothèse de Boussinesq a donc amené certains chercheurs à formuler des modèles la dépassant: c'est entre autres le cas des modèles du second ordre et de contrainte algébrique dont la formulation cherche à déterminer directement la valeur des contraintes de Reynolds  $\tau_{ij}$ . Ces modèles plus évolués sont surtout efficaces pour traiter des problèmes compliqués tels que des écoulements en rotation solide ou à forte courbure. Pour des problèmes moins compliqués, plusieurs travaux indiquent que l'hypothèse de Boussinesq reste acceptable.

Dans ce cadre, les modèles les plus simples sont les modèles algébriques: la viscosité turbulente est évaluée en un point comme le produit entre le carré d'une longueur dite de mélange et la norme du gradient local des vitesses de l'écoulement moyen. Implicitement, ces modèles supposent que la turbulence est en équilibre local, c'est à dire qu'en tout point de l'écoulement, le taux de production de l'énergie cinétique turbulente est égal à son taux de dissipation. La prise en compte des effets de convection ou de diffusion de l'énergie cinétique turbulente n'est donc pas possible avec ce genre de modèle. Par ailleurs, les modèles algébriques doivent être adaptés en fonction du problème considéré: ils manquent de généralité mais restent quand même efficaces pour des problèmes simples de couche limite turbulente ou



d'écoulement confiné entre deux plaques ou dans un tube.

Les modèles plus évolués proposent la résolution d'une ou de deux équations différentielles pour calculer la vitesse et la longueur de mélange caractéristique de la viscosité tourbillonnaire (voir équation (3.47)). La racine carrée de l'énergie cinétique turbulente moyenne est généralement utilisée comme vitesse caractéristique [21]:

$$v_t \propto k^{\frac{1}{2}} \quad (3.48)$$

À partir de l'équation de l'énergie cinétique turbulente (3.17), une équation différentielle pour  $k$  peut être construite. Les modèles de turbulence à une équation consistent en une équation aux dérivées partielles pour  $k$  et une relation algébrique pour déterminer la longueur caractéristique  $l$  de la viscosité turbulente. Les modèles plus évolués résolvent une deuxième équation aux dérivées partielles pour calculer la longueur caractéristique: on les appelle modèles à deux équations. Si l'on considère le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente explicité dans la section 3.1.3 à l'équation (3.20), une analyse dimensionnelle permet de relier  $l$ ,  $k$  et  $\epsilon$  par [21]:

$$l_t \propto \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon} \quad (3.49)$$

L'utilisation des deux équations aux dérivées partielles de  $k$  et  $\epsilon$  pour modéliser la turbulence nous amène à la formulation du modèle  $k$ - $\epsilon$  de Jones et Launder [6]. Ce modèle compte parmi les plus populaires en mécanique des fluides et a fait l'objet de nombreux travaux. Comme nous l'avons déjà signalé au deuxième chapitre de ce m/'emoire, l'utilisation par Crespo et al. [19] du modèle  $k$ - $\epsilon$  dans le sillage d'une éolienne a montré la pertinence de ce modèle pour l'analyse de l'écoulement en aval d'une éolienne. Plusieurs détails de l'écoulement, non reproductibles avec des modèles plus simples, ont été observés et comparés avec succès par rapport à des mesures expérimentales. Comme ici, notre objectif est de développer un modèle mathématique et numérique d'analyse de l'écoulement autour d'une ou plusieurs éoliennes, le choix du modèle  $k$ - $\epsilon$  est donc justifié et raisonnable. La prochaine

section décrit le modèle mathématique de turbulence tel que formulé par Jones et Launder.

### 3.3.2.3 Le modèle $k$ - $\epsilon$

La longueur et la vitesse caractéristiques de la viscosité turbulente, tel que formulé dans la relation de Prandtl-Kolmogorov (voir équation (3.47)), sont reliées à l'énergie cinétique turbulente moyenne  $k$  et à sa dissipation  $\epsilon$  par:

$$v_t \propto k^{\frac{1}{2}} \quad (3.50)$$

$$l_t \propto \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon} \quad (3.51)$$

La viscosité turbulente est donc donnée par la formule:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{l_t^2}{\epsilon} \quad (3.52)$$

Les équations moyennées du mouvement peuvent être écrites à nouveau en utilisant l'équation (3.46) de l'hypothèse de Boussinesq et les expressions (3.36) à (3.38) et en les substituant dans les équations de continuité et de quantité de mouvement (3.13) et (3.14). Les équations sont présentées sous forme tensorielle:

$$\int_{\mathcal{A}} u_j n_j d\mathcal{A} = 0 \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} \rho u_i u_j n_j d\mathcal{A} &= \int_{\mathcal{A}} \left[ -p \delta_{ij} + (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j d\mathcal{A} \\ &\quad + \int_{\mathcal{A}_I} f_i d\mathcal{A} \end{aligned} \quad (3.54)$$

où  $f_i$  correspond aux composantes des forces surfaciques exercées par le rotor sur l'écoulement. Dans le cas où le repère choisi pour écrire les équations est le repère cartésien  $(x, y, z)$ , les composantes  $f_i$  correspondent à  $f_x, f_y$  et  $f_z$  définies aux équations (3.39) à (3.41). Le terme  $-\frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$  de l'équation (3.46) a été incorporé dans la redéfinition de la pression. Les surfaces  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}_I$  et  $d\mathcal{A}$  ont été définies dans les sections précédentes.

Avant de donner les formes modélisées des équations de  $k$  et  $\epsilon$ , il est intéressant de reformuler les équations exactes (3.17) et (3.21) en y incluant les termes de forces dus au rotor. Ainsi, l'équation d'énergie cinétique turbulente s'écrit:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{A}} \rho k u_j n_j d\mathcal{A} = & - \int_{\mathcal{A}} \overline{u'_j \left( p + \frac{1}{2} \rho u'_i u'_i \right) n_j} d\mathcal{A} \\
 & + \int_{\mathcal{A}} \overline{\mu u'_i \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) n_j} d\mathcal{A} \\
 & - \int_{\mathcal{V}} \overline{\rho u'_i u'_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \overline{\mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} d\mathcal{V} \\
 & + \int_{A_r} \overline{f'_i u'_i} dA
 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Dans cette équation,  $f'_i$  représente les composantes des variations instantanées des forces surfaciques du rotor par rapport à leurs valeurs moyennes.

Les mêmes opérations de substitution peuvent être appliquées à l'équation de dissipation de l'énergie cinétique turbulente qui s'écrit finalement:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{2} \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \right)^2} u_j n_j d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_j} \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_j}{\partial x_l}} \\
 & + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{2} \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \right)^2} \right\} d\mathcal{V} = \\
 & \int_{\mathcal{V}} - \frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_l \partial x_i}} + \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \right)} d\mathcal{V} + \int_{A_r} \left( \nu \frac{\partial f'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) dA
 \end{aligned} \quad (3.56)$$

La modélisation de ces deux dernières équations décrite dans l'article de Jones et Launder [6] passe par la formulation de plusieurs hypothèses. Pour l'équation d'énergie cinétique turbulente, on suppose la turbulence isotropique et le terme C de l'équation (3.17) négligeable. De plus, on modélise le terme B comme un terme de diffusion d'énergie cinétique turbulente. La modélisation de l'équation de dissipation est moins rigoureuse et nécessite plus d'hypothèses. En réalité, l'interprétation des termes de l'équation (3.56) repose plus sur la physique du phénomène turbulent que sur les relations mathématiques que l'on cherche à simplifier. Les deux équations

du modèle  $k$ - $\epsilon$  s'écrivent sous forme intégrale:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} \rho k u_j n_j d\mathcal{A} &= \int_{\mathcal{V}} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \epsilon d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j d\mathcal{A} \\ &+ \int_{\mathcal{A}_I} \overline{f'_i u'_i} d\mathcal{A} \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} \rho \epsilon u_j n_j d\mathcal{A} &= \int_{\mathcal{V}} C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} n_j d\mathcal{A} \\ &+ \int_{\mathcal{A}_I} \left( \nu \frac{\partial f'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) d\mathcal{A} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Cette forme du modèle correspond à celle valable pour les hauts nombres de Reynolds turbulent  $Re_T = \rho \frac{k^{0.5} l_t}{\mu}$ . Dans cette formulation, on considère que le travail des forces visqueuses est négligeable par rapport au travail des forces turbulentes et donc que les effets de la viscosité moléculaire n'affectent pas la structure de la turbulence.

Pour fixer les constantes des équations (3.57) et (3.58), il faut d'abord revenir aux équations de l'écoulement atmosphérique neutre détaillées à la section 3.2. Les relations décrites dans cette section par les équations (3.27) à (3.33) doivent être des solutions du modèle mathématique développé. Faisant appel à l'équation de la viscosité turbulente (3.52), à son expression dans un écoulement atmosphérique neutre donnée par (3.27) et à l'expression de la dissipation d'énergie cinétique turbulente donnée par (3.32), on trouve:

$$k_0(z) = \sqrt{\frac{\mu_{t0} \epsilon_0}{\rho C_\mu}} = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (3.59)$$

or l'expression de l'énergie cinétique turbulente dans un écoulement neutre était justement donnée par (voir équation (3.33)):

$$k_0(z) = 5.48 u_*^2 \quad (3.60)$$

d'où on en déduit que:

$$C_\mu = 0.033 \quad (3.61)$$

De même, en remplaçant chacun des termes de l'équation de dissipation (3.58)

par leur expression dans un écoulement atmosphérique neutre, on trouve que la relation suivante doit nécessairement être vérifiée:

$$C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1} = \frac{K^2}{\sigma_{\epsilon} \sqrt{C_{\mu}}} \quad (3.62)$$

La constante  $C_{\epsilon 2}$  a été fixée par Jones et Launder en appliquant le modèle pour le cas d'un écoulement turbulent se dissipant en arrière d'une grille. Les autres constantes ont été fixées par optimisation numérique par Jones et Launder. Les valeurs qui seront utilisées pour notre modèle mathématique sont donc:

$$C_{\mu} = 0.033 \quad C_{\epsilon 1} = 1.24 \quad C_{\epsilon 2} = 1.92$$

$$\sigma_k = 1.0 \quad \sigma_{\epsilon} = 1.3$$

#### 3.3.2.4 Contribution des tourbillons de bouts de pales

La capture des effets instationnaires et turbulents reliés aux tourbillons de bouts de pales doit se réaliser à l'intérieur du cadre de modélisation déjà présenté. À la section 3.3.1, nous avons souligné que les différences de pression entre l'intrados et l'extrados de la pale sont à l'origine des tourbillons de bouts de pales. Sur une aile d'avion en vol rectiligne, par exemple, ces tourbillons entraînent l'écoulement vers le bas et induisent une diminution de l'angle d'attaque (par rapport à l'angle d'attaque de l'aile dans l'écoulement) vu localement par les sections proches du bout d'aile. Comme ces effets ne peuvent être pris en compte intrinsèquement par des méthodes de disque actuateur, Prandtl a développé un facteur pour exprimer le fait qu'une partie de l'énergie cinétique retirée de l'écoulement traversant le rotor est transférée aux tourbillons de bouts de pales.

Dans le but de comprendre les différentes contributions énergétiques dans l'écoulement, nous présentons le développement du travail moyen, par unité de temps,  $\dot{W}_{\text{rotor} \rightarrow VC}$  exercé par les forces extérieures sur un volume de contrôle donné. Ce terme participe au bilan d'énergie cinétique moyenne. On a:

$$\dot{W}_{rotor \rightarrow VC} = \int_{A_I} f_x u + f_y v + f_z w dA \quad (3.63)$$

En remplaçant  $f_x, f_y$  et  $f_z$  par leurs expressions données aux équations (3.39) à (3.41), on trouve:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{rotor \rightarrow VC} = \frac{B}{2\pi} \int_{A_I} \frac{1}{r} [-l_{\tilde{x}} \cos \gamma u + l_{\tilde{x}} \cos \theta \sin \gamma v + l_{\theta} \sin \theta v \\ + l_{\tilde{x}} \sin \theta \sin \gamma w - l_{\theta} \cos \theta w] dA \end{aligned}$$

En remplaçant  $l_{\tilde{x}}$  et  $l_{\theta}$  par leurs expressions données aux équations (3.34) et (3.35), on trouve:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{rotor \rightarrow VC} = \frac{B}{2\pi} \int_{A_I} \frac{\rho c V_{rel}}{2r} \left[ - \left( U_t \frac{C_L}{t_{corr}} + U_n C_D \right) \cos \gamma u \right. \\ + \left( U_t \frac{C_L}{t_{corr}} + U_n C_D \right) (v \cos \theta + w \sin \theta) \sin \gamma \\ \left. + \left( U_n \frac{C_L}{t_{corr}} - U_t C_D \right) (v \sin \theta - w \cos \theta) \sin \gamma \right] dA \end{aligned}$$

Après quelques manipulations, cette équation devient:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{rotor \rightarrow VC} = \frac{B}{2\pi} \int_{A_I} \frac{\rho c V_{rel}}{2r} \left[ \underbrace{-r\Omega (U_n C_L - U_t C_D)}_{(1)} \underbrace{- C_D (U_n^2 + U_t^2)}_{(2)} \right. \\ \left. \underbrace{- r\Omega U_n C_L \left( \frac{1}{t_{corr}} - 1 \right)}_{(3)} \right] dA \quad (3.64) \end{aligned}$$

La puissance moyenne des forces extérieures qui s'appliquent sur le fluide présent dans le volume de contrôle est donc la somme de trois contributions: (1) la puissance mécanique transmise au rotor (voir équation (3.45)), (2) le travail visqueux, par unité de temps, des forces de frottement, (3) une troisième contribution qui représente, au signe près, l'énergie cinétique, par unité de temps, transmise aux tourbillons.

Cette énergie cinétique est retirée de l'air qui traverse le rotor, donc du bilan d'énergie mécanique moyenne. Pour assurer l'équilibre des échanges énergétiques,

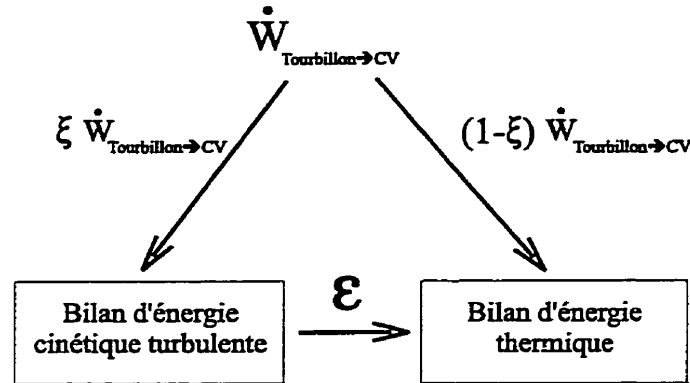


Figure 3.3 Analyse du bilan énergétique dans l'écoulement

cette énergie cinétique doit nécessairement être équilibrée entre les bilans d'énergie cinétique turbulente et d'énergie thermique.

En notant par  $\dot{W}_{\text{tourbillon} \rightarrow VC}$  l'énergie transmise aux tourbillons de bouts de pales dans le volume de contrôle  $\mathcal{V}$ , on a donc:

$$\dot{W}_{\text{tourbillon} \rightarrow VC} = \frac{B}{2\pi} \int_{A_I} \frac{\rho c V_{rel}}{2} \Omega U_n C_L \left( \frac{1}{t_{corr}} - 1 \right) dA \quad (3.65)$$

Notons par  $\xi$  ( $0 < \xi < 1$ ) la proportion de cette énergie directement injectée dans le bilan d'énergie cinétique turbulente, la proportion injectée au bilan d'énergie thermique est donc  $(1 - \xi)$ . La figure 3.3 présente l'échange énergétique attribué aux tourbillons en plus de l'échange qui se réalise entre les bilans d'énergie cinétique turbulente et d'énergie thermique, et dont  $\epsilon$ , le taux de dissipation, mesure le transfert.

En pratique, pour un volume de contrôle donné, l'équation modélisée d'énergie cinétique turbulente s'écrit maintenant:

$$\begin{aligned} \int_A \rho k u_j n_j dA &= \int_V \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \epsilon dV + \int_A \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j dA \\ &+ \xi \frac{B}{2\pi} \int_{A_I} \frac{\rho c V_{rel}}{2} \Omega U_n C_L \left( \frac{1}{t_{corr}} - 1 \right) dA \end{aligned}$$

$$+ \int_{A_I} \overline{f'_i u'_i} dA \quad (3.66)$$

Il faut noter que les opérations décrites dans cette section sont surtout mathématiques. Néanmoins, l'introduction du facteur  $\xi$  nous laisse une certaine flexibilité en nous permettant d'en tester plusieurs valeurs. Nous analyserons surtout les résultats produits par les deux situations extrêmes  $\xi = 0$  et  $\xi = 1$ .

À propos de l'évolution du taux de dissipation à travers le rotor, nous considérons que les contributions apportées à la turbulence par les tourbillons de bouts de pales ne font pas partie des plus petites échelles de la turbulence, dont  $\epsilon$  traduit la dissipation en énergie thermique. Nous considérons donc l'équation du taux de dissipation inchangée.

### 3.3.2.5 Modélisation des termes dûs aux forces instantanées

Au cours du développement des équations d'énergie cinétique turbulente et de dissipation, nous avons fait apparaître des termes dûs aux fluctuations instantanées des forces externes. Ces termes s'écrivent:

$$\text{pour l'équation de } k : \quad \int_{A_I} \overline{f'_i u'_i} dA \quad (3.67)$$

$$\text{pour l'équation de } \epsilon : \quad \int_{A_I} \left( \nu \frac{\partial f'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) dA \quad (3.68)$$

Il faut d'abord noter que ces termes sont intimement reliés au cadre de modélisation choisi dans ce travail, au sens où l'éolienne n'est pas modélisée par la définition précise de sa géométrie, mais par une surface continue et par des forces surfaciques. Dans l'écoulement réel qui existe autour d'une éolienne, les deux termes précédents sont associés aux travaux instantanés exercés par les forces de pression et de cisaillement visqueux dans l'écoulement autour de la pale. Il faut donc considérer, pour notre modèle, que ces termes représentent la somme macroscopique de ces nombreuses contributions.



Pour modéliser le terme  $\overline{f'_i u'_i}$  qui intervient dans l'équation d'énergie cinétique turbulente, trois approches peuvent être retenues:

1. On considère que les forces externes  $\tilde{f}_i$  exercées par le rotor répondent instantanément aux variations  $u'_i$  de vitesse au même point. Les relations (3.39) à (3.41) montrent que les forces  $\tilde{f}_i$  dépendent entièrement des différentes composantes de la vitesse. En un même point, pour une variation élémentaire de la vitesse, on a donc une variation élémentaire des forces  $\tilde{f}_i$  donnée par:

$$f'_i = \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial u_j} u'_j \quad (3.69)$$

On peut donc écrire que:

$$\overline{f'_i u'_i} = \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial u_j} \overline{u'_i u'_j} \quad (3.70)$$

Considérant l'hypothèse de Boussinesq (équation (3.46)), on peut alors relier  $\overline{f'_i u'_i}$  au champ moyen de vitesse.

2. On considère que les forces externes  $\tilde{f}_i$  ne sont pas ou peu influencées par les variations  $u'_i$  de vitesse, c'est à dire que  $\overline{f'_i u'_i} = 0$ .
3. On considère un état intermédiaire, dans lequel les forces externes sont influencées par des changements instantanés de vitesse, mais avec un temps de réponse. La valeur de la corrélation est donc incertaine, néanmoins elle reste inférieure à celle que l'on calcule en suivant le premier scénario.

Pour alléger la présentation du modèle mathématique ainsi que la discussion des résultats, nous préférons déjà conclure dans cette section que les deux premiers cas mentionnés dans l'étude du terme  $\overline{f'_i u'_i}$  ont été étudiés et comparés dans différentes conditions d'opération pour l'éolienne MOD0A. L'influence de ces termes sur les caractéristiques de l'écoulement ou de performance de l'éolienne est négligeable: les différences relatives entre les valeurs de vitesse, de pression, d'énergie cinétique turbulente ou de dissipation entre ces deux situations sont maximales dans le voisinage

immédiat du rotor et restent inférieures à 1%. Nous choisissons donc de ne pas inclure le terme  $\overline{f'_i u'_i}$  dans notre modèle.

Nous supposons que les mêmes conclusions s'appliquent au terme  $\nu \frac{\partial f'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}$  intervenant dans l'équation de dissipation. Cela revient, en quelque sorte, à considérer que la présence des forces externes n'influence pas le transfert d'énergie cinétique turbulente en énergie thermique.

### 3.4 Résumé du modèle mathématique

Les équations suivantes sont donc utilisées pour résoudre l'écoulement autour d'une ou plusieurs éoliennes. Elles sont présentées sous forme intégrale et tensorielle, et hormis les expressions des forces externes, ces équations sont donc indépendantes du système de coordonnées choisi. Vu leurs ordres de grandeurs très différents, la viscosité moléculaire est négligée par rapport à la viscosité turbulente.

Continuité:

$$\int_{\mathcal{A}} u_j n_j d\mathcal{A} = 0 \quad (3.71)$$

Quantité de mouvement:

$$\int_{\mathcal{A}} \rho u_i u_j n_j d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} \left[ -p \delta_{ij} + \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{A}_I} f_i d\mathcal{A} \quad (3.72)$$

Énergie cinétique turbulente:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} \rho k u_j n_j d\mathcal{A} &= \int_{\mathcal{V}} P_t - \rho \epsilon d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}} \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j d\mathcal{A} \\ &+ \xi \frac{B}{2\pi} \int_{\mathcal{A}_I} \frac{\rho c V_{rel}}{2} \Omega U_n C_L \left( \frac{1}{t_{corr}} - 1 \right) d\mathcal{A} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Dissipation d'énergie cinétique turbulente:

$$\int_{\mathcal{A}} \rho \epsilon u_j n_j d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_t - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}} \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} n_j d\mathcal{A} \quad (3.74)$$

La viscosité turbulente  $\mu_t$  est définie par:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.75)$$

et  $P_t$  correspond au terme de production d'énergie cinétique turbulente:

$$P_t = \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.76)$$

Dans le repère cartésien  $(x, y, z)$  où l'axe  $x$  est orienté selon la direction de l'écoulement incident et où les axes  $y$  et  $z$  correspondent respectivement aux axes transversaux et verticaux, les expressions des forces surfaciques  $f_i$  exercées par le rotor sur l'écoulement sont données par:

$$f_x = -\frac{B}{2\pi} \frac{l_{\bar{x}}}{r} \cos \gamma \quad (3.77)$$

$$f_y = \frac{B}{2\pi} \frac{l_{\bar{x}} \cos \theta \sin \gamma + l_{\theta} \sin \theta}{r} \quad (3.78)$$

$$f_z = \frac{B}{2\pi} \frac{l_{\bar{x}} \sin \theta \sin \gamma - l_{\theta} \cos \theta}{r} \quad (3.79)$$

où

$$l_{\bar{x}} = \frac{\rho c V_{rel}}{2} \left[ U_t \frac{C_L}{t_{corr}} + U_n C_D \right] \quad (3.80)$$

$$l_{\theta} = \frac{\rho c V_{rel}}{2} \left[ U_n \frac{C_L}{t_{corr}} - U_t C_D \right] \quad (3.81)$$

$$V_{rel} = \sqrt{U_n^2 + U_t^2} \quad (3.82)$$

$$U_n = u \cos \gamma - [\cos \theta v + \sin \theta w] \sin \gamma \quad (3.83)$$

$$U_t = r\Omega - [w \cos \theta - v \sin \theta] \quad (3.84)$$

et  $t_{corr}$  correspond au facteur de correction de Prandtl défini par:

$$t_{corr} = t_T t_H \quad (3.85)$$

$$t_T = \frac{2}{\pi} \arccos \left[ \exp \left( -B \frac{R \cos \gamma - r}{2r \sin(\alpha + \beta)} \right) \right] \quad (3.86)$$

$$t_H = \frac{2}{\pi} \arccos \left[ \exp \left( -B \frac{r - R_H \cos \gamma}{2R_H \cos \gamma \sin(\alpha + \beta)} \right) \right] \quad (3.87)$$

Finalement, les relations valables dans l'écoulement incident, et qui constituent les conditions aux frontières du problème, sont décrites à la section 3.2.

### 3.5 Spécialisation du modèle mathématique: développement d'une formulation axisymétrique

Pour étudier le modèle mathématique qui vient d'être énoncé, nous nous proposons dans un premier temps de développer une formulation axisymétrique. Cette première formulation nous permettra en effet de valider le modèle à un problème de silage axisymétrique, d'étudier la sensibilité de la solution à la finesse du maillage et l'influence de la contribution énergétique des tourbillons de bouts de pales sur la solution. Étant donnée la nature tridimensionnelle de l'écoulement incident, la formulation précédente n'est pas directement applicable à une forme axisymétrique et doit donc être modifiée afin d'atteindre cet objectif.

Dans cette optique, nous proposons de décomposer les propriétés de l'écoulement moyen en deux composantes: une première incorporant les détails tridimensionnels de l'écoulement incident et une deuxième possédant, sous certaines hypothèses, des caractéristiques d'axisymétrie. Définissons par  $\phi$  une des variables dépendantes de l'écoulement étudié (i.e.  $\phi = u_i, p, k$  ou  $\epsilon$ ). Posons alors:

$$\phi(x, y, z) = \phi^*(x, y, z) + \tilde{\phi}_0(z) \quad (3.88)$$

où  $\tilde{\phi}_0(z) = \phi_0(z) - \phi_0(H)$ ,  $\phi_0(z)$  correspond aux valeurs de la variable dépendante considérée dans l'écoulement atmosphérique non perturbé (voir la section 3.2). Par conséquent,  $\phi^*$  correspond à la somme de la perturbation introduite par l'éolienne dans l'écoulement non-perturbé avec la valeur de  $\phi_0(z)$  évaluée à hauteur de moyeu (i.e.  $\phi_0(H)$ ).

Prenons maintenant pour première hypothèse que les variations des propriétés dans la couche de surface non-perturbée sont négligeables par rapport aux variations des propriétés de l'écoulement perturbé  $\phi^*(x, y, z)$ , c'est à dire:

$$\nabla \tilde{\phi}_0 \ll \nabla \phi^* \quad (3.89)$$

Compte tenu de cette première hypothèse, supposons aussi que l'écart, par rapport

à leur valeur au moyeu, des propriétés non-perturbées  $\tilde{\phi}_0(z)$  soit négligeable par rapport aux valeurs des propriétés de l'écoulement perturbé  $\phi^*(x, y, z)$ , c'est à dire:

$$\tilde{\phi}_0 \ll \phi^* \quad (3.90)$$

Ces hypothèses sont d'autant plus raisonnables que le rapport  $H/R$  est grand ( $R$  correspond au rayon des pales). En utilisant ces simplifications et en soustrayant les termes provenant des équations non-perturbées aux équations de continuité, de quantité de mouvement, d'énergie cinétique turbulente et de dissipation, les équations suivantes sont obtenues pour les nouvelles variables de l'écoulement  $u_i^*, p^*, k^*$  et  $\epsilon^*$  (après un développement en série de Taylor du premier ordre).

Équations de continuité et de quantité de mouvement:

$$\int_{\mathcal{A}} u_j^* n_j d\mathcal{A} = 0 \quad (3.91)$$

$$\int_{\mathcal{A}} \rho u_i^* u_j^* n_j d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} \left[ -p^* \delta_{ij} + \mu_t^* \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \right] n_j d\mathcal{A} + \int_{A_I} f_i dA \quad (3.92)$$

Équations d'énergie cinétique turbulente et de dissipation:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} \rho k^* u_j^* n_j d\mathcal{A} &= \int_{\mathcal{V}} P_t^* - \rho \epsilon^* + \rho \epsilon_0(\mathbf{H}) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}} \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \frac{\partial k^*}{\partial x_j} n_j d\mathcal{A} \\ &+ \xi \frac{B}{2\pi} \int_{A_I} \frac{\rho c V_{rel}}{2} \Omega U_n C_L \left( \frac{1}{t_{corr}} - 1 \right) dA \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} \rho \epsilon^* u_j^* n_j d\mathcal{A} &= \int_{\mathcal{V}} C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon^*}{k^*} P_t^* - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^{*2}}{k^*} + C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon_0(\mathbf{H})^2}{k_0(\mathbf{H})} d\mathcal{V} \\ &+ \int_{\mathcal{A}} \frac{\mu_t^*}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon^*}{\partial x_j} n_j d\mathcal{A} \end{aligned} \quad (3.94)$$

où

$$P_t^* = \mu_t^* \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \quad (3.95)$$

$$\mu_t^* = \rho C_\mu \frac{k^{*2}}{\epsilon^*} \quad (3.96)$$

Par rapport au système original d'équations à résoudre, on peut remarquer l'addition des deux termes  $\rho \epsilon_0(H)$  et  $C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon_0(H)^2}{k_0(H)}$  dans les équations d'énergie cinétique

turbulente et de dissipation. Ces termes proviennent des effets du sol sur la génération d'énergie cinétique turbulente.

Par ailleurs, loin en amont, en aval et sur les côtés de l'éolienne, les propriétés ( $\phi$ ) de l'écoulement correspondent à celles de l'écoulement non-perturbé ( $\phi_0$ ) et les propriétés  $u_i^*$ ,  $k^*$  et  $\epsilon^*$  de perturbation introduites par l'éolienne sont donc constantes et égales à  $u_{i0}(H)$ ,  $k_0(H)$  et  $\epsilon_0(H)$ . Les conditions aux frontières, pour lesquelles les propriétés de perturbation sont imposées, sont donc symétriques par rapport à l'axe de rotation des pales. Si de plus on considère que la distribution des forces externes  $f_i$  est axisymétrique et que les autres conditions aux frontières peuvent aussi être considérées axisymétriques, le système des équations (3.91) à (3.94) possède alors comme propriété remarquable que les solutions  $u_i^*$ ,  $p^*$ ,  $k^*$  et  $\epsilon^*$  seront elles aussi axisymétriques. Pour développer une formulation axisymétrique, nous considérerons donc que la distribution de forces externes est symétrique par rapport au moyeu de l'éolienne et nous solutionnerons le champ des variables  $\phi^*$ . Les forces sont alors calculées selon la procédure décrite à la section 3.3.1 à la différence que dans l'évaluation des vitesses, les vitesses  $u_i^*$  de perturbation sont utilisées.

## CHAPITRE IV

### Modélisation numérique

#### 4.1 Description de la méthode

Pour solutionner le modèle mathématique précédemment énoncé dans sa formulation tridimensionnelle et axisymétrique, nous utilisons les deux méthodes numériques aux éléments finis / volumes de contrôle développées par Masson et al. [29] (dans le cas axisymétrique) et par Saabas et Baliga [30] (dans le cas tridimensionnel). Ces deux méthodes solutionnent directement les variables primitives (vitesse et pression) du problème.

D'une façon générale, la formulation d'une méthode aux éléments finis / volumes de contrôle applicable à des problèmes de mécanique des fluides ou de transfert de chaleur implique cinq étapes de base:

1. La discrétisation du domaine de calcul en éléments.
2. La discrétisation de chacun de ces éléments en sous éléments qui, autour de chaque point du maillage, s'assemblent collectivement pour former des volumes de contrôle.
3. La prescription de fonctions d'interpolation dans chaque élément du maillage, pour prescrire les variations des propriétés thermophysiques (densité, viscosité) et des variables dépendantes.
4. L'application des équations intégrales de conservation pour chaque volume de contrôle défini dans le maillage. Cette étape génère un ensemble de relations algébriques entre les valeurs des variables naturelles en chaque point du maillage. Ces relations se construisent en assemblant les contributions de chacun

des éléments du maillage et en considérant les conditions aux frontières.

5. La prescription d'une procédure pour solutionner le système algébrique formé par les équations discrétisées.

Dans le cas des deux méthodes utilisées pour nos travaux, les variables dépendantes sont toutes stockées au même point. Pour empêcher l'apparition de solution en pression de type damier, les flux massiques aux frontières des volumes de contrôle sont exprimés comme la somme de deux termes: un premier fonction des vitesses nodales et des termes sources de l'élément et un deuxième lié au gradient local de pression dans chaque élément. L'algorithme utilisé pour résoudre de façon itérative le problème non-linéaire posé par les équations de Navier-Stokes est l'algorithme SIMPLER développé par Patankar [31] et que l'on peut résumer par la procédure suivante:

- (1) Prescrire un champ de vitesse initial
- (2) Calculer les coefficients des équations discrétisées de quantité de mouvement ainsi que les deux termes définissant les flux massiques à travers les frontières des volumes de contrôle.
- (3) Solutionner le champ de pression
- (4) À partir du champ de pression calculé à l'étape (3), solutionner les équations discrétisées de quantité de mouvement
- (5) Solutionner les équations discrétisées des autres variables dépendantes du problème.
- (6) Tester la convergence et retourner à l'étape (2) s'il n'y a pas convergence.

Dans les deux formulations, les équations qui décrivent le transport de quantité de mouvement sont représentées sous la forme générale suivante:



$$\int_{\mathcal{A}} \rho u_i u_j n_j d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} \left[ \Gamma_{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - p \delta_{ij} \right] n_j d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}} S_{u_i} d\mathcal{V} \quad (4.1)$$

Les équations décrivant le transport des autres variables dépendantes, dénotées ici par  $\phi$ , sont présentées sous la forme générale suivante:

$$\int_{\mathcal{A}} \rho \phi u_j n_j d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}} S_{\phi} d\mathcal{V} \quad (4.2)$$

Les sections suivantes présentent les expressions des termes  $\Gamma_{u_i}, S_{u_i}, \Gamma_{\phi}$  et  $S_{\phi}$  correspondant au modèle mathématique développé dans le cas des méthodes axisymétriques et tridimensionnelles. De plus, le découpage du domaine, la représentation de l'éolienne ainsi que les conditions aux frontières sont aussi explicitées. Pour la définition plus précise des deux méthodes utilisées, le lecteur intéressé est encouragé à se référer aux articles de Masson et al. [29] et Saabas et Baliga [30].

## 4.2 Modèle axisymétrique

### 4.2.1 Description du domaine

Dans le modèle axisymétrique, le domaine de résolution du modèle mathématique correspond à un cylindre de section circulaire et d'axe, l'axe de rotation de la machine.

La figure 4.1 illustre une section longitudinale de ce domaine. Étant donné la nature axisymétrique de l'écoulement, toute section longitudinale passant par l'axe de symétrie possède les mêmes caractéristiques en vitesse, pression, etc. En discrétisant en éléments et en volumes de contrôle la section de la figure 4.1, on discrétise en même temps, par une rotation de la section autour de l'axe de symétrie, le domaine cylindrique dans lequel on résout l'écoulement. Ici, les éléments utilisés pour discrétiser la section sont des triangles. En chaque point du domaine discrétisé,

les arêtes des volumes de contrôle sont définies par les segments joignant les centroides des triangles au milieu de leurs côtés. Après une rotation complète de la section autour de l'axe de symétrie, les éléments discrétisant le domaine et les volumes de contrôle sont donc des tores de sections triangulaire et polygonale. L'éolienne est représentée par la surface conique du rotor, et correspond donc à une ligne sur la section de la figure 4.1. Sur cette figure, les volumes de contrôle interséquant la surface du rotor sont représentés en noir. Le repère de référence est le repère  $(x, r, \theta)$  et les vitesses sont repérées par les composantes  $u_x^*$ ,  $u_r^*$  et  $u_\theta^*$  (où  $u_\theta^*$  est associée à la rotation de l'écoulement).

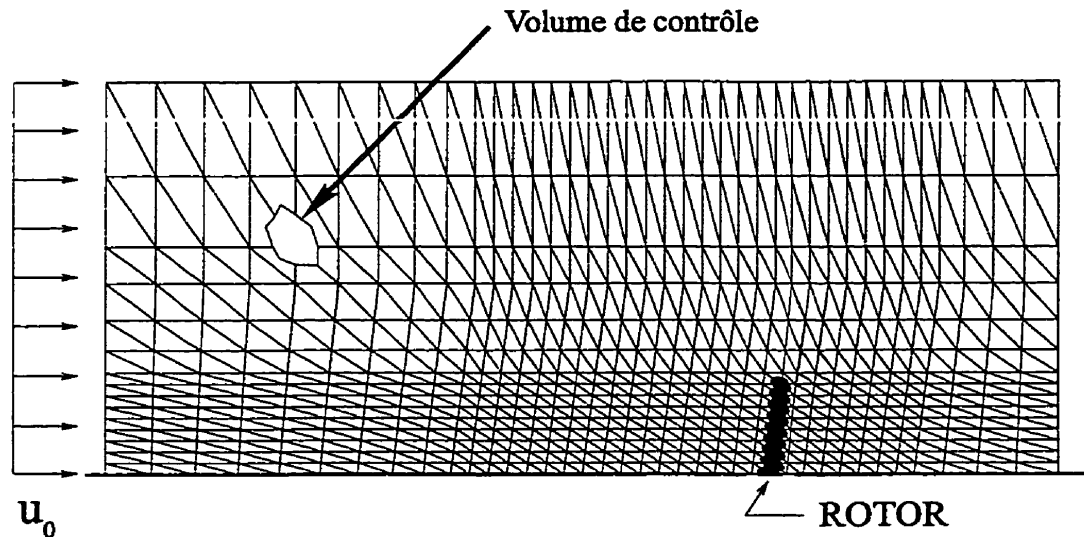


Figure 4.1 Section longitudinale du domaine axisymétrique

## 4.2.2 Expressions des coefficients de diffusion et des termes sources

### 4.2.2.1 Équations de quantité de mouvement

Pour élaborer les expressions des coefficients de diffusion et des termes sources de la formulation axisymétrique, il nous faut d'abord ramener l'expression tensorielle des équations de quantité de mouvement (voir équation (3.92)) à l'expression tensorielle

de la formulation de Masson décrite à l'équation (4.1).

Pour cela, transformons le terme associé aux forces de cisaillement visqueux et turbulent. En utilisant le théorème de la divergence, on trouve:

$$\int_{\mathcal{A}} \mu_t^* \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) n_j d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu_t^* \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \right] d\mathcal{V}$$

En distribuant et en dérivant le produit composé de l'expression précédente, on a:

$$\int_{\mathcal{A}} \mu_t^* \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) n_j d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu_t^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \mu_t^*}{\partial x_j} \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} + \mu_t^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) d\mathcal{V}$$

En intervertissant l'ordre de différentiation (sous réserve de propriétés de continuité suffisantes), le dernier terme de cette équation s'annule en raison de l'équation de continuité et on peut donc, en appliquant à nouveau le théorème de la divergence, écrire que:

$$\int_{\mathcal{A}} \mu_t^* \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) n_j d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} \mu_t^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} n_j d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mu_t^*}{\partial x_j} \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} d\mathcal{V} \quad (4.3)$$

Dans le membre de droite de l'équation précédente, le premier terme correspond au terme associé à la diffusion dans la formulation générale de Masson (voir l'équation (4.1)). L'analyse tensorielle nous permet alors de développer les expressions des coefficients de diffusion et des termes sources associées à chacune des équations de quantité de mouvement selon  $x, r$  et  $\theta$ . Comme le problème est axisymétrique, les dérivées par rapport à  $\theta$  sont nulles. En résumé, on trouve:

$$\Gamma_{u_z^*} = \Gamma_{u_r^*} = \Gamma_{u_\theta^*} = \mu_t^* \quad (4.4)$$

$$S_{u_z^*} = \frac{\partial \mu_t^*}{\partial x} \frac{\partial u_z^*}{\partial x} + \frac{\partial \mu_t^*}{\partial r} \frac{\partial u_z^*}{\partial r} + \left( \int_{A_I} -\frac{B}{2\pi r} l_{\bar{x}} \cos \gamma dA \right) / \mathcal{V} \quad (4.5)$$

$$S_{u_r^*} = \frac{\partial \mu_t^*}{\partial x} \frac{\partial u_r^*}{\partial r} + \frac{\partial \mu_t^*}{\partial r} \frac{\partial u_r^*}{\partial r} + \left( \int_{A_I} \frac{B}{2\pi r} l_{\bar{x}} \sin \gamma dA \right) / \mathcal{V} \quad (4.6)$$

$$S_{u_\theta^*} = -\frac{u_\theta^*}{r} \frac{\partial \mu_t^*}{\partial r} + \left( \int_{A_I} -\frac{B}{2\pi r} l_\theta dA \right) / \mathcal{V} \quad (4.7)$$

où  $u_x^*, u_r^*$  et  $u_\theta^*$  sont les composantes de la vitesse selon les coordonnées cylindriques  $(x, r, \theta)$ ,  $l_{\bar{x}}$  et  $l_\theta$  ont été exprimées lors de l'évaluation des forces exercées par le rotor sur l'écoulement (voir les équations (3.80) et (3.81)).

Étant donné la nature axisymétrique de l'écoulement considéré, l'équation de quantité de mouvement selon la direction  $\theta$  peut en fait être considérée, du point de vue algorithmique, comme faisant partie des équations supplémentaires à résoudre, décrivant le transport des autres variables dépendantes du problème. En effet, sa non-dépendance vis-à-vis du terme de pression permet de solutionner cette équation indépendamment des équations du mouvement selon  $x$  et  $r$ , essentielles pour résoudre le champ de pression.

Pour accélérer et garantir la convergence de l'algorithme de solution, les termes sources  $S_{u_i}$  et  $S_\phi$  sont linéarisés selon la forme:

$$S_{u_i} = Sc_{u_i} + Sp_{u_i}u_i \quad (4.8)$$

$$S_\phi = Sc_\phi + Sp_\phi\phi \quad (4.9)$$

En appliquant cette forme supplémentaire, la linéarisation numérique choisie pour les équations de quantité de mouvement est:

$$Sc_{u_x^*} = \frac{\partial \mu_t^*}{\partial x} \frac{\partial u_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \mu_t^*}{\partial x} \frac{\partial u_r^*}{\partial r} \quad (4.10)$$

$$Sp_{u_x^*} = \frac{\left( \int_{A_I} -\frac{B}{2\pi r} l_{\bar{x}} \cos \gamma dA \right) / \mathcal{V}}{u_x^*} \quad (4.11)$$

$$Sc_{u_r^*} = S_{u_r^*} \quad (4.12)$$

$$Sp_{u_r^*} = 0 \quad (4.13)$$

$$Sc_{u_\theta^*} = S_{u_\theta^*} \quad (4.14)$$

$$Sp_{u_\theta^*} = 0 \quad (4.15)$$

Seul le terme source associé à l'équation du mouvement selon la direction  $x$  est linéarisé. Cette procédure permet en fait de réduire l'importance des termes sources dans les équations discrétisées du mouvement et d'éviter ainsi de générer des problèmes dans la résolution numérique des systèmes matriciels. Par ailleurs, les contributions des forces externes dans les équations de quantité de mouvement et de turbulence sont intégrées le long de la surface conique du rotor en utilisant la procédure

décrite par Ammara [5].

#### 4.2.2.2 Équations d'énergie cinétique turbulente et de dissipation

Pour l'équation d'énergie cinétique turbulente ( $\phi=k^*$ ), le coefficient de diffusion  $\Gamma_{k^*}$  et le terme source  $S_{k^*}$  sont exprimés par:

$$\Gamma_{k^*} = \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \quad (4.16)$$

$$S_{k^*} = P_t^* - \rho \epsilon^* + \rho \epsilon_0(H) + \left[ \xi \frac{B}{2\pi} \int_{A_I} \frac{\rho c V_{rel}}{2} \Omega U_n C_L \left( \frac{1}{t_{corr}} - 1 \right) dA \right] / \mathcal{V} \quad (4.17)$$

L'analyse tensorielle nous permet d'évaluer le terme de production  $P_t^*$  en fonction des gradients locaux de vitesse dans le repère cylindrique considéré:

$$P_t^* = \mu_t^* \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \quad (4.18)$$

$$= \mu_t^* \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u_x^*}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{u_r^*}{r} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u_\theta^*}{\partial r} - \frac{u_\theta^*}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial x} + \frac{\partial u_x^*}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_\theta^*}{\partial z} \right)^2 \right\} \quad (4.19)$$

Pour l'équation de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ( $\phi=\epsilon^*$ ), le coefficient de diffusion  $\Gamma_{\epsilon^*}$  et le terme source  $S_{\epsilon^*}$  sont exprimés par:

$$\Gamma_{\epsilon^*} = \frac{\mu_t^*}{\sigma_\epsilon} \quad (4.20)$$

$$S_{\epsilon^*} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon^*}{k^*} P_t^* - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^{*2}}{k^*} + C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon_0(H)^2}{k_0(H)} \quad (4.21)$$

La linéarisation imposée aux termes sources est ici:

$$S_{ck^*} = P_t^* + \rho \epsilon_0(H) + \left[ \xi \frac{B}{2\pi} \int_{A_I} \frac{\rho c V_{rel}}{2} \Omega U_n C_L \left( \frac{1}{t_{corr}} - 1 \right) dA \right] / \mathcal{V} \quad (4.22)$$

$$S_{pk^*} = -\rho \frac{\epsilon^*}{k^*} \quad (4.23)$$

$$S_{c\epsilon^*} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon^*}{k^*} P_t^* + C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon_0(H)^2}{k_0(H)} \quad (4.24)$$

$$Sp_{\epsilon^*} = -C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^*}{k^*} \quad (4.25)$$

$$(4.26)$$

Numériquement, les coefficients de diffusion sont stockés en chaque noeud du domaine discrétisé, comme les variables dépendantes du problème. Sur les faces des volumes de contrôle, les valeurs des coefficients de diffusion sont calculées par interpolation linéaire sur les triangles discrétisant le domaine. De même, les dérivées impliquées dans la dérivation des termes sources sont calculées en considérant une distribution linéaire des variables dépendantes à l'intérieur de chaque élément triangulaire. Les termes, autres que des dérivées, composant les expressions des termes sources, sont évalués, pour un volume de contrôle donné, en prenant directement leur valeur au noeud de ce volume de contrôle. L'évaluation des flux de diffusion pour chaque variable dépendante  $\phi$  ( $\phi = u_x^*, u_r^*, u_\theta^*, k^*$  ou  $\epsilon^*$ ) se réalise en considérant une distribution linéaire dans chaque élément du maillage, tandis que l'évaluation du flux de convection est basée sur le schéma proposé par Schneider et Raw [32], adapté pour la méthode axisymétrique par Masson et al. [29].

Enfin, pour la robustesse de l'algorithme de résolution, les termes sources utilisés pour solutionner numériquement les équations discrétisées d'énergie cinétique turbulente et de dissipation sont calculés, pour chaque itération de l'algorithme SIMPLER, en utilisant les propriétés de turbulence ( $k^*$  et  $\epsilon^*$ ) de l'itération précédente.

#### 4.2.3 Conditions aux frontières

Pour pouvoir solutionner correctement le problème mathématique énoncé au chapitre 3, il faut prescrire des conditions aux frontières sur les trois faces du domaine de calcul décrit à la section 4.2.1. Essentiellement, ces conditions sont de deux types: Dirichlet ou Neumann. Quand la valeur d'une variable dépendante est imposée sur les frontières du domaine, on parle d'une condition de Dirichlet tandis que quand la valeur du flux de la variable est précisée, on parle d'une condition de Neumann (ou

naturelle). Dans le cas axisymétrique, étant donné que nous résolvons le problème posé par les perturbations  $\phi^*$ , nous choisissons pour conditions aux frontières:

**frontière d'entrée:** Cette frontière est un disque  $r$ - $\theta$  placé en amont de la turbine. Dans ce disque, les trois composantes de vitesse et les propriétés de turbulence sont égales à leurs valeurs non-perturbées, et on impose donc les conditions de Dirichlet suivantes:

$$u_x^* = u_0(H)$$

$$u_r^* = u_\theta^* = 0$$

$$k^* = k_0(H)$$

$$\epsilon^* = \epsilon_0(H)$$

**frontière de sortie:** La frontière de sortie est un disque  $r$ - $\theta$  placé en aval de la turbine. Dans ce disque, les trois composantes de vitesse et les propriétés de turbulence sont calculées à partir des équations discrétisées en utilisant le traitement de sortie de Patankar [31]. Ce traitement revient en fait à paraboliser localement les équations du modèle mathématique. De plus, la pression est imposée en un point de cette frontière: cette opération est nécessaire étant donné que la pression est définie à une constante près.

**frontière supérieure:** Cette frontière est la surface externe du domaine cylindrique présenté à la figure 4.1, localisée à bonne distance du bout de pale. Dans ce plan, les composantes  $u_x^*$  et  $u_r^*$  de la vitesse sont fixées à leurs valeurs non-perturbées, i.e:

$$u_x^* = u_0(H)$$

$$u_r^* = 0$$

Le flux de diffusion associé à la composante  $u_\theta^*$  à travers cette frontière est posé nul, et pour les caractéristiques en turbulence, les flux de diffusion d'énergie cinétique turbulente et de diffusion sont considérés négligeables et sont donc posés nuls.

### 4.3 Modèle tridimensionnel

#### 4.3.1 Description du domaine

Dans la formulation tridimensionnelle, le domaine de résolution du modèle mathématique correspond à un parallépipède rectangulaire dans lequel on retrouve l'éolienne. La face du bas est située à proximité du sol, tandis que les autres faces sont situées à distance respectable de la machine. La figure 4.2a présente le domaine selon une vue en perspective. La discrétisation du domaine s'effectue d'abord en le découpant en parallépipèdes rectangles (voir figure 4.2a). Chacun de ces parallépipèdes est ensuite divisé en six tétraèdres dont les sommets sont les noeuds où sont stockées les vitesses, pression et autres variables dépendantes du problème. La figure 4.2b illustre ce second découpage du domaine. Une fois que le découpage du domaine en tétraèdres est réalisé, les volumes de contrôle entourant chaque noeud du maillage peuvent être construits. Dans un premier temps, les points milieux de chaque arête du tétraèdre sont identifiés (points  $a$  à  $f$  de la figure 4.2c). Dans un deuxième temps, ces points permettent de définir les surfaces des volumes de contrôle. Tel que présenté à la figure 4.2c, deux surfaces triangulaires (formées par les points  $(a, f, c)$  et  $(b, c, e)$ ) et une surface rectangulaire (formée par les points  $(b, c, f, d)$ ) sont créées à l'intérieur de chaque tétraèdre. Pour chaque noeud du maillage, le découpage de tous les tétraèdres adjacents à ce noeud permet donc de définir un volume de contrôle entourant ce noeud, dont une représentation est donnée en exemple à la figure 4.2d.

Pour représenter adéquatement l'éolienne, le maillage est adapté localement à la forme géométrique du rotor. On s'assure ainsi que des noeuds soient placés directement sur la surface conique du rotor. Le repère de référence est le repère  $(x, y, z)$  tel que présenté à la figure 4.2a et les vitesses sont mesurées par les composantes  $u, v$  et  $w$ .



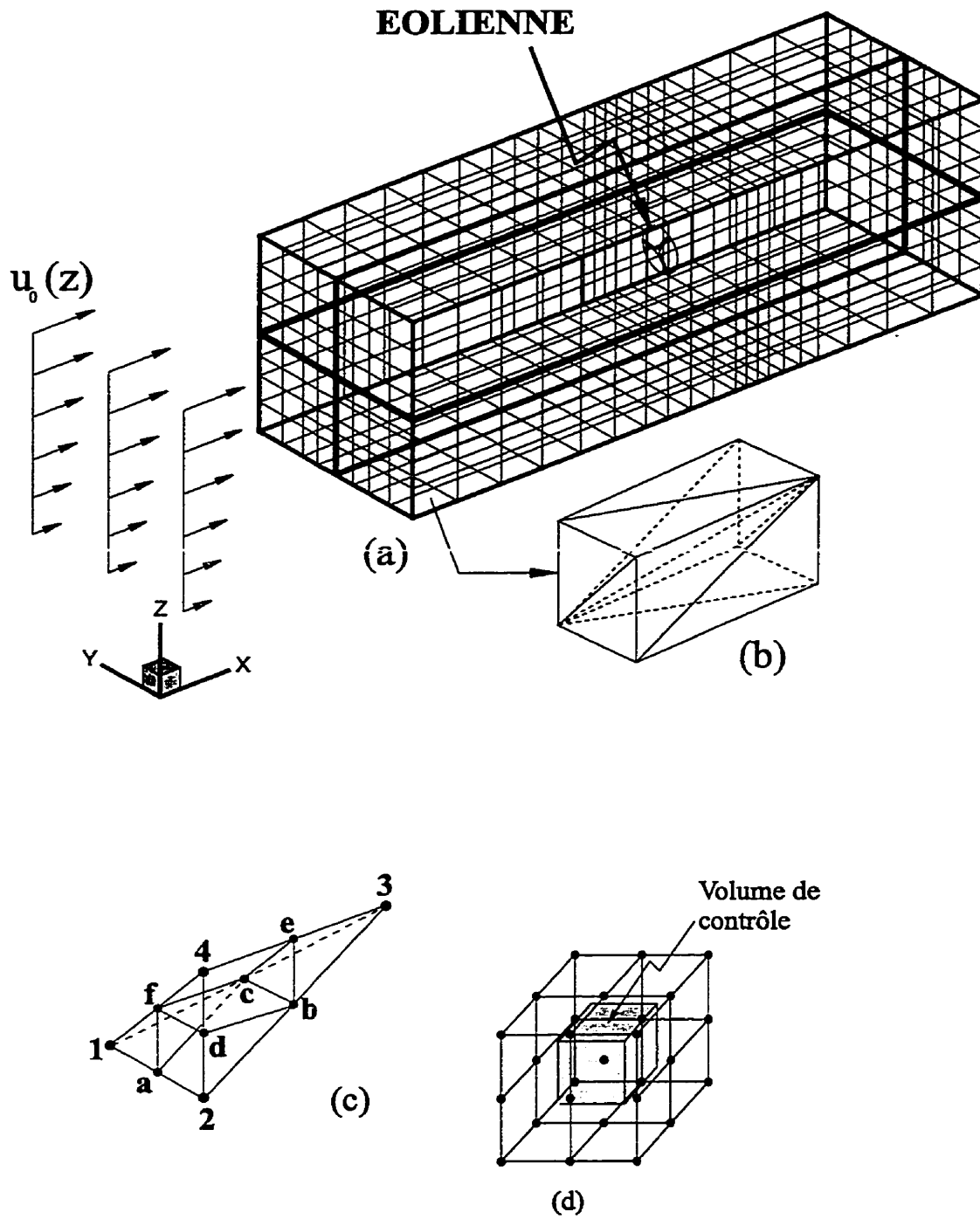


Figure 4.2 Domaine de calcul et topologie du maillage

### 4.3.2 Expressions des coefficients de diffusion et des termes sources

#### 4.3.2.1 Équations de quantité de mouvement

Le développement énoncé dans la section consacrée à la formulation axisymétrique est applicable à la méthode tridimensionnelle. On peut donc directement écrire:

$$\Gamma_u = \Gamma_v = \Gamma_w = \mu_t \quad (4.27)$$

$$S_u = \frac{\partial \mu_t}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu_t}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \mu_t}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \left( \int_{A_I} f_x dA \right) / \mathcal{V} \quad (4.28)$$

$$S_v = \frac{\partial \mu_t}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \mu_t}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \mu_t}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \left( \int_{A_I} f_y dA \right) / \mathcal{V} \quad (4.29)$$

$$S_w = \frac{\partial \mu_t}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \mu_t}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \mu_t}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \left( \int_{A_I} f_z dA \right) / \mathcal{V} \quad (4.30)$$

Le seul terme à être décomposé linéairement est le terme source  $S_u$  pour lequel on pose

$$S_u = S_{C_u} + S_{P_u} u$$

où

$$S_{C_u} = \frac{\partial \mu_t}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu_t}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \mu_t}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.31)$$

$$S_{P_u} = \frac{\left( \int_{A_I} f_x dA \right) / \mathcal{V}}{u} \quad (4.32)$$

Le calcul des termes sources dus aux forces extérieures est réalisé par intégration discrète sur la surface conique du rotor, en divisant les surfaces interséquées par les volumes de contrôle en des mini-surfaces, sur lesquelles une intégration de type gaussienne est réalisée. Cette procédure est décrite plus en détail dans le travail de Ammara [5].

#### 4.3.2.2 Équations d'énergie cinétique turbulente et de dissipation

Les coefficients de diffusion des propriétés de turbulence  $k$  et  $\epsilon$  sont:

$$\Gamma_k = \frac{\mu_t}{\sigma_k} \quad \Gamma_\epsilon = \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \quad (4.33)$$

Les termes sources associés  $S_\phi = S_{C_\phi} + S_{P_\phi}\phi$  sont:

$$S_{C_k} = P_t + \left[ \xi \frac{B}{2\pi} \int_{A_I} \frac{\rho c V_{rel}}{2} \Omega U_n C_L \left( \frac{1}{t_{corr}} - 1 \right) dA \right] / \mathcal{V} \quad (4.34)$$

$$S_{P_k} = -\rho \frac{\epsilon}{k} \quad (4.35)$$

$$S_{C_\epsilon} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_t \quad (4.36)$$

$$S_{P_\epsilon} = -C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon}{k} \quad (4.37)$$

où

$$P_t = \mu_t \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (4.38)$$

Dans chaque élément tétraédral, les propriétés de diffusion  $\Gamma_{u_i}$  et  $\Gamma_\phi$  sont évaluées au centroïde de l'élément et sont supposées prévaloir sur l'élément. Dans les calculs de dérivées et d'interpolation des flux de diffusion, la distribution des variables dépendantes est considérée linéaire dans chaque élément. Les flux de convection sont évalués selon le schéma de Schneider et Raw [32] adapté pour la méthode tridimensionnelle par Saabas et al. [30]. Finalement, pour les mêmes raisons que dans la formulation axisymétrique, le calcul des termes sources des équations de turbulence est réalisé en prenant les caractéristiques de turbulence de l'itération précédente.

### 4.3.3 Conditions aux frontières

Les conditions aux frontières suivantes sont prescrites sur les six faces du domaine de calcul (présenté à la figure 4.2a):

**frontière d'entrée:** Cette frontière est un plan  $y$ - $z$  placé en amont de l'éolienne. Dans ce plan, situé suffisamment loin pour que les propriétés de l'écoulement atmosphérique ne soient pas altérées par la présence de l'éolienne, les trois composantes

de la vitesse et les propriétés  $k$ - $\epsilon$  sont fixées aux valeurs prises dans l'écoulement non-perturbé (décrites à la section 3.2). Les conditions de Dirichlet suivantes sont donc imposées:

$$u = u_0(z)$$

$$v = w = 0$$

$$k = k_0(z)$$

$$\epsilon = \epsilon_0(z)$$

**frontière de sortie:** La frontière de sortie est un plan  $y$ - $z$  situé en aval de l'éolienne. Dans ce plan, la pression est supposée uniforme. De plus, les trois composantes de vitesse et les propriétés de turbulence sont calculées à partir des équations discrétisées en utilisant le traitement de sortie de Patankar [31].

**frontière du bas:** La frontière du bas est un plan  $x$ - $y$  positionné à proximité du sol. Notons par  $d$  la distance entre le sol et ce plan. Sur cette surface, les perturbations introduites par l'éolienne sont considérées négligeables: les composantes  $v$  et  $w$  de la vitesse sont donc fixées à zéro et la contrainte de cisaillement exercée par le sol dans la direction  $x$  est prise égale à  $\tau_0$  (contrainte mesurée dans l'écoulement non-perturbé). Les propriétés de turbulence sont fixées à leurs valeurs dans l'écoulement non-perturbé. Les conditions aux frontières sont donc:

$$\mu_t \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=d} = \tau_0$$

$$v = w = 0$$

$$k = k_0(d)$$

$$\epsilon = \epsilon_0(d)$$

**frontières du dessus et des côtés:** La frontière du dessus est un plan  $x$ - $y$  situé à distance  $d'$  du sol tandis que les deux frontières des côtés sont des plans  $x$ - $z$ . La contrainte de cisaillement exercée par les couches supérieures de l'atmosphère à

travers la frontière du dessus est considérée égale à  $\tau_0$ , c'est à dire qu'on impose:

$$\mu_t \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=d'} = \tau_0$$

Les flux de convection de la variable  $u$  à travers les plans de côtés sont posés nuls, et enfin, les flux de convection et de diffusion des autres variables dépendantes  $v, w, k$  et  $\epsilon$  à travers les trois plans du dessus et des côtés sont posés nuls.

## CHAPITRE V

### Résultats

Dans ce chapitre, le modèle mathématique proposé est d'abord validé en simulant l'expansion du sillage turbulent en arrière d'un sphéroïde. La formulation axisymétrique est ensuite appliquée à l'analyse de l'éolienne MOD-0A (développée par la NASA et le Département de l'Énergie). Les comparaisons entre les mesures expérimentales de sillage et les prédictions numériques obtenues avec la formulation proposée nous permettent d'analyser l'influence du terme ajouté à l'équation d'énergie cinétique turbulente pour tenir compte des tourbillons de bouts de pales. La troisième partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des résultats produits par la formulation tridimensionnelle.

#### 5.1 Validation du modèle: sillage axisymétrique

Pour tester la capacité du modèle  $k$ - $\epsilon$  à reproduire les caractéristiques de turbulence d'un sillage, le sillage turbulent d'un corps de révolution est d'abord étudié. Les prédictions numériques sont comparées aux mesures expérimentales de Chevray [33]. Le dispositif expérimental consiste en un sphéroïde 6 fois plus long que large, placé dans un écoulement avec un nombre de Reynolds (basé sur la longueur du corps) de  $2.75 \cdot 10^6$ . La formulation axisymétrique a naturellement été choisie pour tester et valider ce cas, mais au lieu de solutionner les variables de perturbation  $u_i^*, p^*, k^*$  et  $\epsilon^*$ , les variables dépendantes  $u_i, p, k$  et  $\epsilon$  sont solutionnées directement. De cette façon, les termes supplémentaires des équations de turbulence, par rapport au modèle original, n'apparaissent pas. De plus, les constantes du modèle  $k$ - $\epsilon$  utilisées sont celles initialement dérivées par Jones et Launder [6] et non celles modifiées pour

notre modèle (voir la sous-section 3.3.2.3). On a donc:

$$C_\mu = 0.09 \quad C_{\epsilon 1} = 1.44$$

La dimension du domaine de résolution cylindrique est de 40 diamètres de long et de 8 diamètres de rayon, le diamètre de référence étant le diamètre maximum mesuré sur le corps de révolution. Les conditions d'entrée utilisées pour cette simulation sont extraites des mesures de Chevray à une distance de 3 diamètres en aval du corps. Elles concernent les composantes du champ de vitesse et la distribution de l'énergie cinétique turbulente en entrée. Pour l'équation de dissipation, il est proposé, comme condition en entrée, de considérer le flux de diffusion associé à  $\epsilon$  comme étant négligeable.

Une étude de maillage a montré qu'un maillage, non-uniforme, de 35\*40 points, garantissait l'indépendance de la solution numérique vis à vis du maillage. À la figure 5.1, le déficit adimensionnel de vitesse  $u_d/u_0$  (où  $u_d = u_0 - u_x$ ) mesuré à l'axe de symétrie du problème est tracé en fonction de la distance axiale adimensionnelle. Loin en arrière du corps de révolution, on observe une légère différence entre prédictions et mesures. Il faut cependant noter que, basée sur l'hypothèse de similarité axiale des profils de vitesse [33], l'analyse théorique de ce problème prédit que le déficit de vitesse à l'axe devrait varier selon  $(x - x_0)^{\frac{2}{3}}$ , ce qui est en accord avec la pente logarithmique de -0.67 prédite par notre formulation. Cette propriété de similarité est d'ailleurs mise en évidence à la figure 5.2 où les profils radiaux de déficit de vitesse prédits et mesurés sont présentés pour différentes positions axiales. Aux figures 5.3 à 5.7, les profils radiaux d'énergie cinétique turbulente prédits par la formulation sont comparés aux mesures de Chevray. L'accord est en général satisfaisant, assez du moins pour démontrer la pertinence d'utiliser le modèle  $k-\epsilon$  pour des problèmes de sillage.

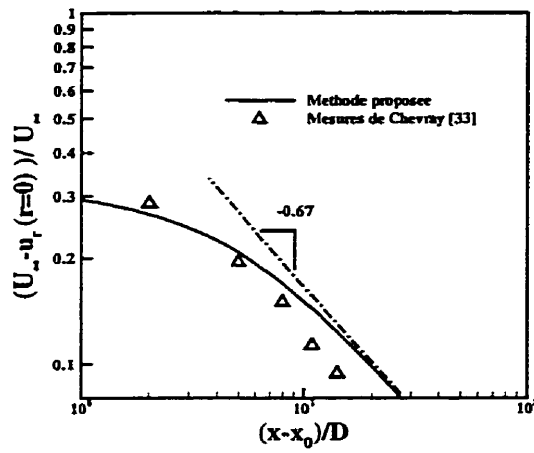


Figure 5.1 Déficit de vitesse à l'axe en fonction de la position axiale,  $\frac{x_0}{D} = 4$

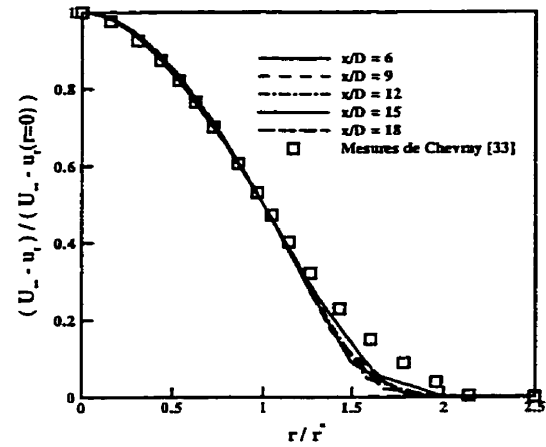


Figure 5.2 Distribution radiale du déficit de vitesse à l'axe pour différentes stations axiales

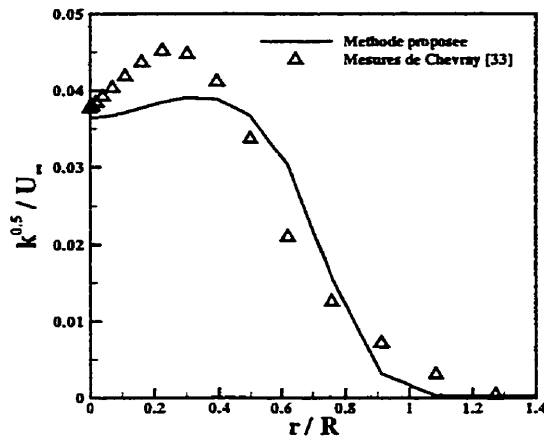


Figure 5.3 Distribution d'énergie cinétique turbulente pour  $\frac{x}{D} = 6$

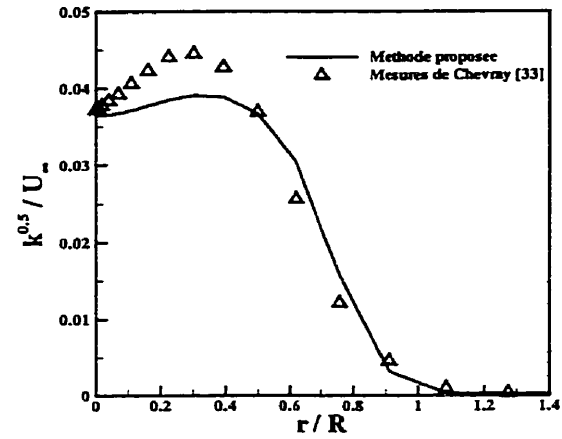


Figure 5.4 Distribution d'énergie cinétique turbulente pour  $\frac{x}{D} = 9$



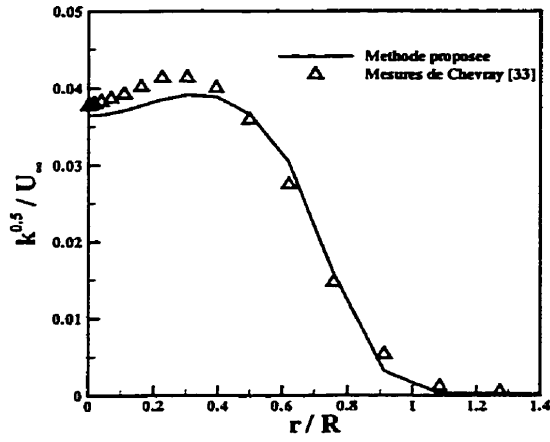


Figure 5.5 Distribution d'énergie cinétique turbulente pour  $\frac{\varepsilon}{D} = 12$

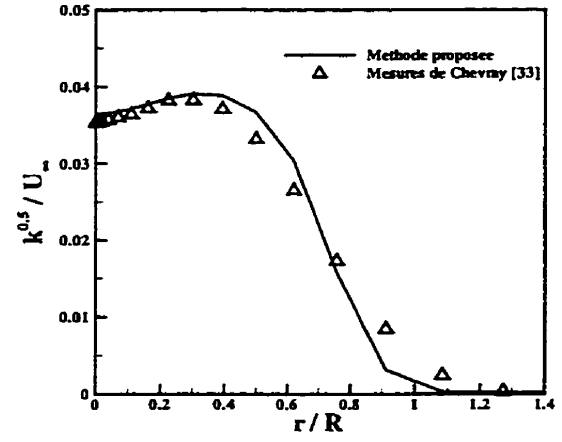


Figure 5.6 Distribution d'énergie cinétique turbulente pour  $\frac{\varepsilon}{D} = 15$

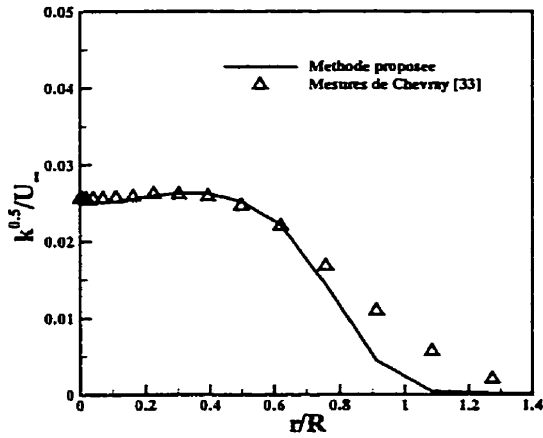


Figure 5.7 Distribution d'énergie cinétique turbulente pour  $\frac{\varepsilon}{D} = 18$

## 5.2 Formulation axisymétrique: résultats

### 5.2.1 Modélisation de l'éolienne MOD-0A

Tous les prochains calculs présentés dans ce mémoire seront effectués sur l'éolienne MOD-0A dont le diamètre est de 38.1 m, la hauteur du moyeu de 30.5 m. La puissance mécanique typiquement fournie par cette éolienne est de 100 MW et la rotation des pales est de 40 tours par minute. Le profil utilisé sur la pale est le NACA23015 et les distributions de corde et de vrillage sont disponibles dans la littérature [25]. Les pales font un angle de conicité avec la verticale de  $5^\circ$  et l'angle de calage de la pale est fixé à zéro pour tous les calculs.

La dimension du domaine choisi pour les simulations est de  $12.5 \times 4.2$  diamètres, où le diamètre de référence est celui de l'éolienne. Le rotor est placé à 7.5 diamètres de la frontière d'entrée. Le nombre de points utilisés pour mailler l'éolienne est de 14 et le nombre de points total du maillage est de  $82 \times 43$ . Ce maillage permet d'atteindre un compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats. Des calculs effectués sur un maillage doublement plus raffiné (28 points pour mailler l'éolienne,  $163 \times 85$  points pour mailler le domaine) ont conduit à des différences maximum de 0.4% sur la puissance mécanique, 3% sur la vitesse, 2.5% sur l'énergie cinétique turbulente et de 4% sur la dissipation. Les différences maximales sont observées dans la zone du sillage proche, et en dehors de cette zone, les différences entre les deux solutions sont inférieures à 1%.

Dans un premier temps, l'étude portera sur l'effet du terme ajouté à l'équation d'énergie cinétique turbulente pour prendre en compte les tourbillons de bouts de pales. Cette première étude nous permettra en outre de comparer les résultats de la formulation avec des mesures expérimentales. Par la suite, les résultats de vitesse, de pression et d'énergie cinétique turbulente obtenus avec le modèle proposé seront présentés. L'influence du niveau de turbulence ambiante sur la puissance mécanique

sera analysée et comparé aux observations de Elliott et al. [15]. La puissance mécanique fournie par deux éoliennes placées l'une derrière l'autre sera finalement étudiée en fonction de la distance entre les deux éoliennes.

### 5.2.2 Analyse de la contribution des tourbillons de bouts de pales au bilan d'énergie cinétique turbulente

À la section 3.3.2.4, une fraction  $\xi$  de l'énergie cinétique transmise aux tourbillons de bouts de pales a été injectée au bilan d'énergie cinétique turbulente. Nous nous proposons d'analyser l'effet de cette contribution en analysant essentiellement les deux cas extrêmes  $\xi = 1$  et  $\xi = 0$ . À la figure 5.8, l'évolution du déficit adimensionnel de vitesse à l'axe est présentée en fonction de la position axiale (adimensionnalisée par le diamètre de la machine). Cette simulation a été effectuée en considérant une atmosphère en conditions thermiques neutres, avec une vitesse de vent incident à hauteur de moyeu de 8.05 m/s, correspondant en fait au point d'efficacité maximal de l'éolienne (mesuré par le coefficient de puissance). La hauteur de rugosité est fixée à 5 mm. Les résultats obtenus en posant  $\xi = 0$  (pas d'effets de bouts de pales) et  $\xi = 1$  (avec effets de bouts de pales) sont comparés. On peut faire deux remarques:

- Pour une même station axiale, les déficits de vitesse prédits diminuent de façon significative quand on inclut la contribution des tourbillons de bouts de pales.
- La pente logarithmique de la courbe de déficit est sensiblement la même dans les deux cas et vaut environ -1.06.

La prédiction du champ de vitesse dans le sillage d'une éolienne est donc fortement influencée par le terme modélisant les effets de bouts de pales.

Cet effet peut aussi être évalué en reproduisant les expériences de Doran et al. [34]: sur un terrain plat, deux rangées d'anémomètres sont positionnées de façon à mesurer les propriétés de l'écoulement incident et du sillage de l'éolienne MOD-0A. Tel qu'illustré à la figure 5.9, une rangée de sept tours est présente au sud-ouest à

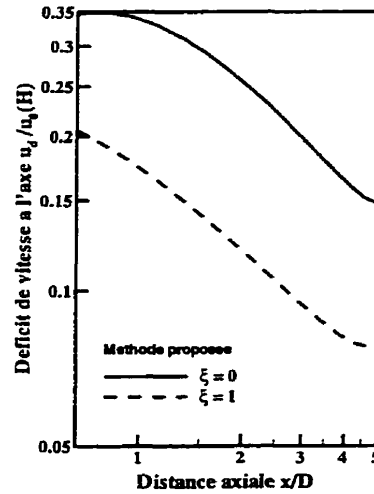


Figure 5.8 Évolution du déficit axial de vitesse dans le sillage de l'éolienne MOD-0A

une distance de 4 diamètres de l'éolienne, tandis que deux autres tours sont placées au nord-est à 4 diamètres de l'éolienne. Sur chaque tour, des anémomètres Gill sont installés à hauteur de moyeu pour mesurer les vitesses du vent. De plus, le niveau de turbulence est mesuré dans l'écoulement incident à hauteur de moyeu pour chaque expérimentation.

Pour simuler l'écoulement incident, la vitesse turbulente de friction et la rugosité de surface prescrites sont ajustées de façon à garantir la même valeur d'énergie cinétique turbulente et la même vitesse à hauteur de moyeu dans l'écoulement incident simulé que mesurés dans les expérimentations. En considérant les relations valides dans les écoulements en conditions thermiques neutres, la valeur de la vitesse turbulente de friction  $u_*$  est donc fixée par la relation:

$$u_* = \left( k_0(H) \sqrt{C_\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.1)$$

la rugosité de surface est alors calculée par la relation (voir l'équation (3.29)):

$$Z_0 = \frac{H}{\exp\left(\frac{K}{u_*} u_0(H)\right)} \quad (5.2)$$

Il aurait été utile de pouvoir comparer directement les niveaux de turbulence mesurés et prédits dans le sillage de l'éolienne. Cependant, aucune expérimentation assez détaillée n'a été trouvée dans la littérature. Les figures 5.10 à 5.15 montrent les résultats obtenus pour reproduire six expérimentations différentes. En légende de chaque figure la vitesse mesurée au moyeu dans l'écoulement incident, l'angle d'incidence du vent et le niveau de turbulence ambiante sont indiqués. Les profils de vitesse présentés sont ceux interpolés sur les rangées d'anémomètres et la vitesse est tracée en fonction de la position le long de ces rangées. Sur chaque figure, les résultats produits par la formulation axisymétrique avec et sans prise en compte des effets de bouts de pales ( $\xi = 1$  et  $\xi = 0$ ) sont présentés. Les résultats obtenus par le modèle de Lissaman [10] complètent ces figures.

Sur chaque figure, on peut remarquer qu'en incluant le terme des effets de bouts de pales, les vitesses prédites dans le sillage de l'éolienne sont toujours supérieures à celles prédites par la formulation excluant ce terme. Ce terme a en effet pour conséquence d'augmenter les niveaux prédits de viscosité turbulente, c'est à dire les transferts de quantité de mouvement par les échanges turbulents, et donc d'accélérer le retour des vitesses dans le sillage à leurs valeurs amonts.

Pour illustrer ce phénomène, des comparaisons entre les vitesses  $k^{\frac{1}{2}}$  et les longueurs caractéristiques  $\frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon}$  de la turbulence sont présentées dans le cas d'une simulation effectuée avec le terme des effets de bouts de pales et sans ce terme. L'écoulement incident choisi est caractérisé par une vitesse à hauteur de moyeu de 8.05 m/s et une rugosité de surface de 5 mm. Les figures 5.16 et 5.17 représentent les prédictions de vitesse caractéristiques tandis que les figures 5.18 et 5.19 représentent les prédictions de longueurs caractéristiques.

L'influence du terme supplémentaire modélisant la contribution des tourbillons

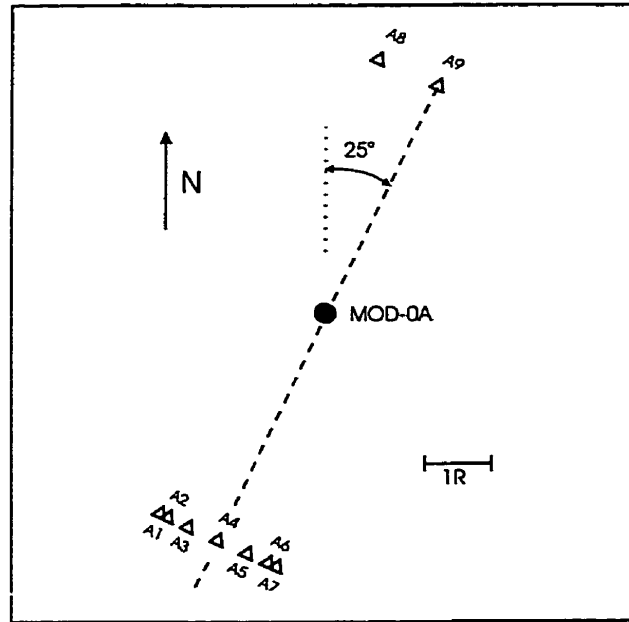


Figure 5.9 Représentation schématique du positionnement des anémomètres et de l'éolienne lors des expérimentations de Doran et al. [34]

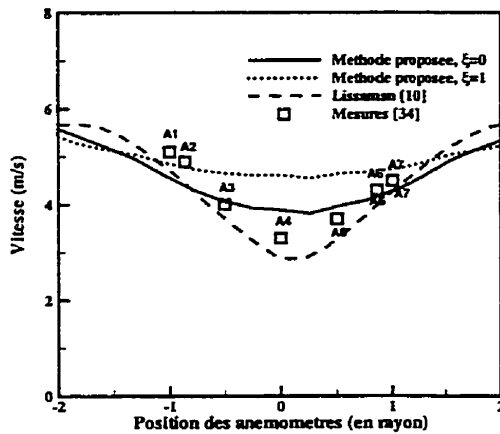


Figure 5.10 Solution axisymétrique,  $u_0(H) = 5.67 \text{ m/s}$ , angle d'incidence du vent  $= 23^\circ$ ,  $k_0(H) = 0.54 \text{ m}^2/\text{s}^2$

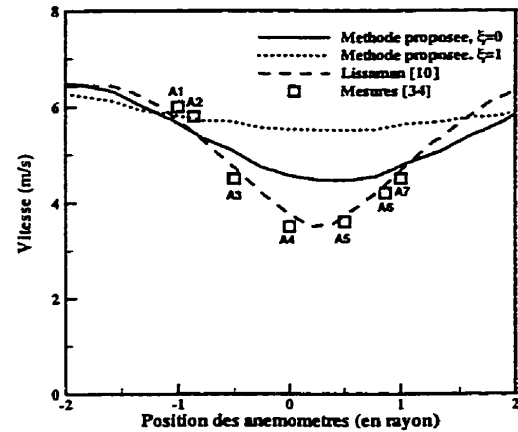


Figure 5.11 Solution axisymétrique,  $u_0(H) = 6.43 \text{ m/s}$ , angle d'incidence du vent  $= 21^\circ$ ,  $k_0(H) = 0.7 \text{ m}^2/\text{s}^2$

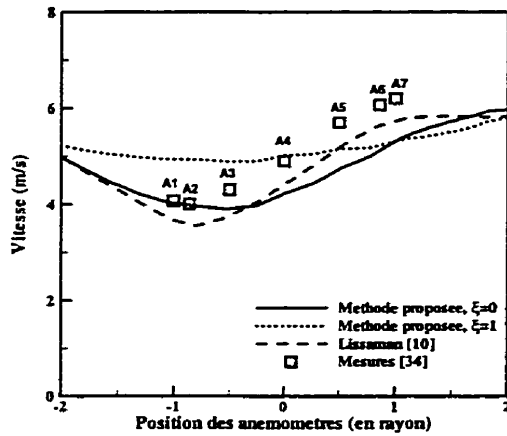


Figure 5.12 Solution axisymétrique,  $u_0(H) = 5.83m/s$ , angle d'incidence du vent =  $37^\circ$ ,  $k_0(\vec{H}) = 0.76m^2/s^2$

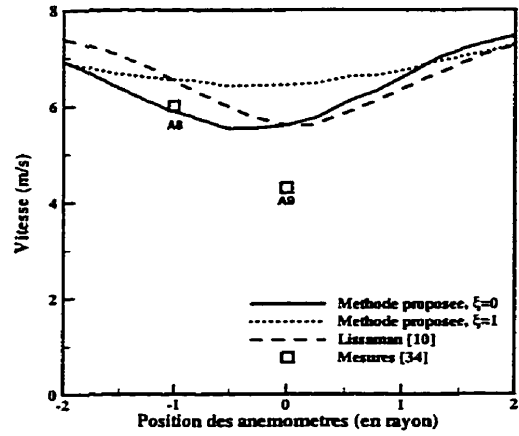


Figure 5.13 Solution axisymétrique,  $u_0(H) = 7.44m/s$ , angle d'incidence du vent =  $206^\circ$ ,  $k_0(\vec{H}) = 1.8m^2/s^2$

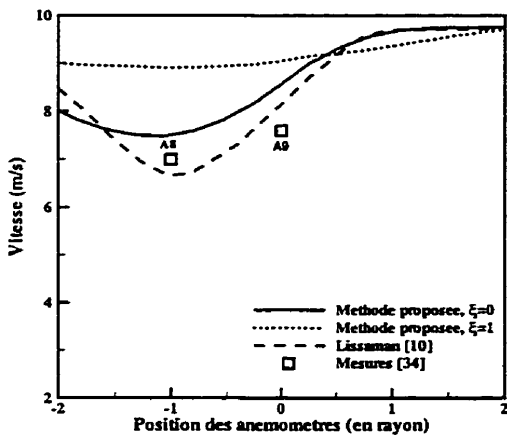


Figure 5.14 Solution axisymétrique,  $u_0(H) = 9.66m/s$ , angle d'incidence du vent =  $192^\circ$ ,  $k_0(H) = 1.35m^2/s^2$

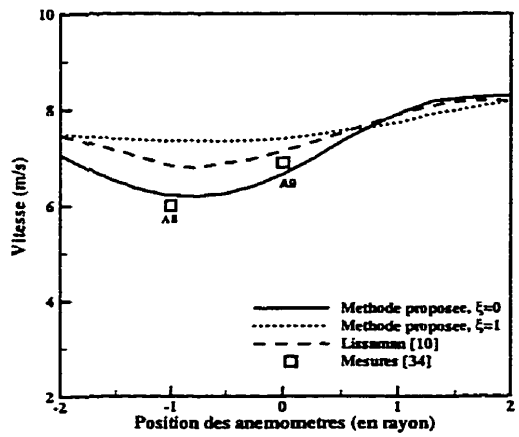


Figure 5.15 Solution axisymétrique,  $u_0(H) = 8.17m/s$ , angle d'incidence du vent =  $193^\circ$ ,  $k_0(H) = 2.9m^2/s^2$

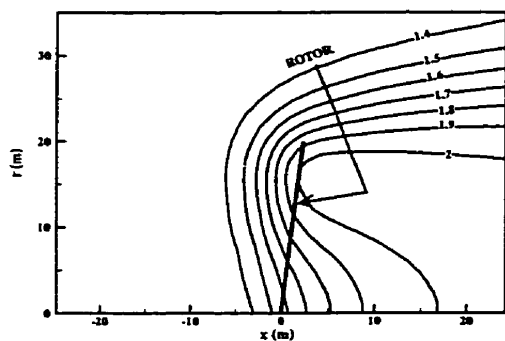


Figure 5.16 Distribution des vitesses caractéristiques de la turbulence  $k^{1/2}$  (en m/s) prédites par la formulation avec  $\xi = 0$

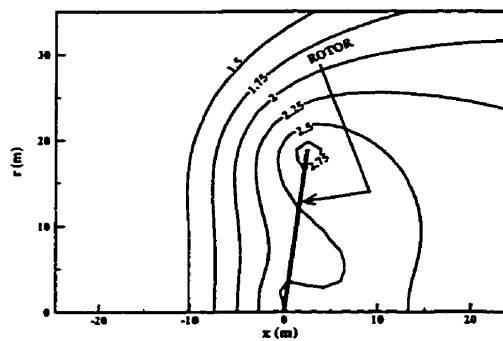


Figure 5.17 Distribution des vitesses caractéristiques de la turbulence  $k^{1/2}$  (en m/s) prédites par la formulation avec  $\xi = 1$

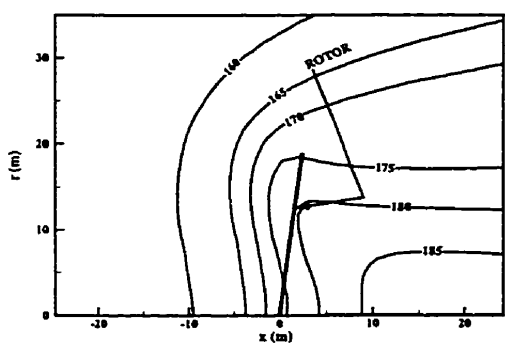


Figure 5.18 Distribution des longueurs caractéristiques de la turbulence  $\frac{k^{3/2}}{\epsilon}$  (en m) prédites par la formulation avec  $\xi = 0$

p

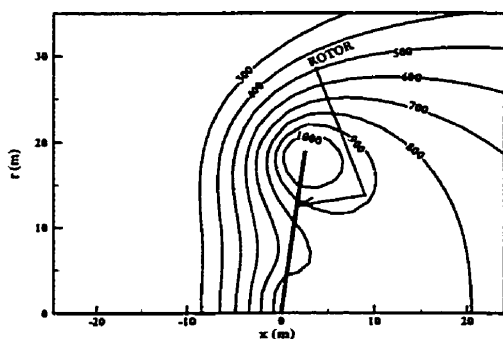


Figure 5.19 Distribution des longueurs caractéristiques de la turbulence  $\frac{k^{3/2}}{\epsilon}$  (en m) prédites par la formulation avec  $\xi = 1$



de bouts de pales est considérable: à proximité de l'éolienne, les niveaux prédits de vitesses caractéristiques sont 1.3 fois plus élevés quand ce terme est pris en compte, et les longueurs caractéristiques sont 5 fois plus élevées. Ceci signifie donc, à proximité de l'éolienne, une augmentation d'un facteur 6 de la viscosité turbulente.

De ces deux formulations néanmoins, les résultats produits par la formulation excluant ce terme sont les plus proches des mesures. On note cependant, pour certains calculs, jusqu'à 20 % de différence entre mesures et prédictions. En comparaison avec le modèle de Lissaman, les tendances prédites sont identiques et des différences d'au maximum 15 % sont relevées. Le modèle de Lissaman consiste dans un premier temps à diviser le sillage en trois zones: sillage proche, zone de transition et sillage lointain. Dans chaque zone, les évolutions des vitesses sont imposées par des fonctions empiriques prenant en compte les caractéristiques de l'éolienne, la turbulence ambiante et celle générée par la machine. Pour calibrer ce modèle, il est donc nécessaire de connaître à l'avance les résultats d'expérimentations sur l'éolienne à simuler. Cette méthode nécessite une calibration différente en fonction de chaque machine tandis que la méthode présentée dans ce mémoire reste générale.

Pour expliquer le manque de précision des prévisions obtenues avec la formulation proposée, plusieurs hypothèses peuvent être formulées:

- Les conditions atmosphériques dans lesquelles les expérimentations ont été réalisées sont probablement éloignées des conditions thermiques neutres. Hormis les expérimentations des figures 5.13 et 5.15 réalisées vers 11h du matin, les autres ont été réalisées vers 5h de l'après-midi. Or, les conditions propices à une atmosphère en conditions thermiques neutres se situent plutôt vers la fin de la nuit et le début de la matinée. De plus, ne connaissant que les caractéristiques de l'écoulement au moyeu, il est délicat d'en déduire la rugosité.
- Les caractéristiques en portance et en traînée du profil NACA23015 utilisées pour nos calculs sont valides pour un nombre de Reynolds de  $3 \cdot 10^6$ . Or, pour

une gamme de vents incidents entre 5 et 10 m/s, les nombres de Reynolds varient le long de la pale de  $10^5$  à  $3.10^6$ . Non seulement l'influence de ces termes est-elle importante pour la prédiction du sillage, mais elle l'est tout autant pour la prédiction de la puissance mécanique générée par l'éolienne.

- Les limitations du modèle axisymétrique peuvent aussi poser un problème quand il s'agit de reproduire des expérimentations. Les effets du sol sont introduits indirectement et les effets tridimensionnels du sillage ne sont pas prédictibles (descente du centre du sillage vers le bas, asymétrie du sillage).
- Le choix de ne pas considérer les effets induits par la tour dans le modèle mathématique (blocage de l'écoulement, frottement visqueux et même décollement) peut expliquer le manque de précision des résultats en vitesse, précisément en arrière du moyeu de l'éolienne.

Pour conclure cette section, la contribution énergétique des tourbillons de bouts de pales influence de manière caractéristique les résultats. Des deux situations testées ( $\xi = 1$  et  $\xi = 0$ ), la situation pour laquelle l'énergie cinétique des tourbillons est entièrement transmise au bilan d'énergie thermique fournit les résultats les plus proches des mesures expérimentales. De plus, si l'on fait l'hypothèse raisonnable que les autres situations pour lesquelles  $0 < \xi < 1$  conduisent à des prédictions de vitesse intermédiaires aux deux situations extrêmes étudiées, il apparaît que la situation où  $\xi = 0$  reste la plus satisfaisante. Dans leurs observations, Högström et al. [13] ont noté la nature fortement dissipative des tourbillons, et Alfredsson et al. [12] ont remarqué la nature très ordonnée et peu turbulente de ces tourbillons à proximité de la pale. On peut donc supposer qu'au lieu d'influencer significativement les transferts de quantité de mouvement, les structures des tourbillons de bouts de pales sont localisées, énergétiques et fortement dissipatives. Dans le cas de l'éolienne MOD0A, il est donc conseillé de considérer que l'énergie transmise aux tourbillons de bouts de pales est entièrement dissipée sous forme thermique. Ce résultat sera

appliqué à tous les prochains calculs.

### 5.2.3 Discussion des résultats produits par la formulation

Les capacités de prédiction de la formulation axisymétrique sont illustrées pour un écoulement incident avec une vitesse à hauteur de moyeu de 8.05 m/s et une rugosité de surface de 5 mm.

La figure 5.20 présente la distribution des déficits adimensionnels de vitesse  $\frac{u_d}{u_0(H)}$  à proximité de l'éolienne. Au passage de l'éolienne, les masses d'air entrant dans la zone balayée par le rotor sont ralenties, et cet effet est plus important aux bouts de pales. Les masses d'air plus lentes localisées aux extrémités des pales contribuent alors à ralentir les masses d'air centrales du rotor, et ce n'est seulement qu'à une distance d'un diamètre en aval du rotor que l'écoulement commence à réaccélérer vers les valeurs de l'écoulement incident.

La figure 5.21 présente la distribution de pression obtenue pour les mêmes conditions. Les isobares de pression se resserent dans le voisinage immédiat de l'éolienne, et l'action de l'éolienne semble donc consister à créer un saut de pression dans l'écoulement. C'est en effet le cas si l'on analyse le transport de quantité de mouvement au travers d'un volume de contrôle qui intersèque la surface du rotor: comme la conservation de la masse impose à la vitesse d'être continue au travers de la surface du rotor, la quantité de mouvement l'est aussi, à fortiori. Il en résulte donc qu'un saut de pression est alors le seul terme pouvant équilibrer la présence des forces extérieures. Le concept de disque actuateur, utilisé dans d'autres méthodes plus classiques de prédiction des performances d'une éolienne, est donc en relation directe avec la formulation présente. Le disque actuateur consiste en effet à simuler la présence de l'éolienne par un saut de pression.

La figure 5.22 présente la distribution de l'énergie cinétique turbulente à proximité du rotor. Le niveau moyen de turbulence de l'écoulement est, pour référence,

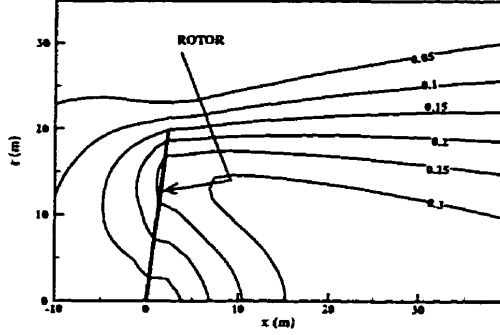


Figure 5.20 Profils de déficits de vitesse adimensionnels  $\frac{u_d}{u_0(H)}$ ,  $u_0(H)=8.05$  m/s

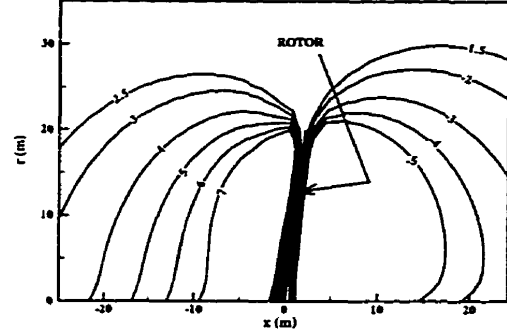


Figure 5.21 Profils de pression (en Pa),  $u_0(H)=8.05$  m/s

de  $1.62 \text{ m}^2/\text{s}^2$ . On remarque une augmentation du niveau d'énergie cinétique turbulente dans le voisinage de l'éolienne, en raison du travail produit par les forces de cisaillement dans l'écoulement, et en particulier, on peut noter des pics d'énergie cinétique turbulente aux bouts de pales. Cette observation est, qualitativement, en accord avec les observations de Högström et al. [13] qui décrivent des pics similaires aux extrémités des pales.

#### 5.2.4 Effets de la turbulence sur la puissance mécanique

Pour illustrer les capacités de prédiction de la formulation développée, les effets de la turbulence sur la performance mécanique générée par l'éolienne sont étudiées. L'analyse expérimentale menée par Elliott et al. [15] a montré que pour une même vitesse de vent incident à hauteur de moyeu, une augmentation du niveau de turbulence conduit à une augmentation de la puissance mécanique de la machine. En théorie, cette augmentation peut être quantifiée par la formule suivante (voir l'équation (2.2)):

$$P = P(u_0(H)) \left[ 1 + 3 \left( \frac{\sigma}{u_0(H)} \right)^2 \right] \quad (5.3)$$

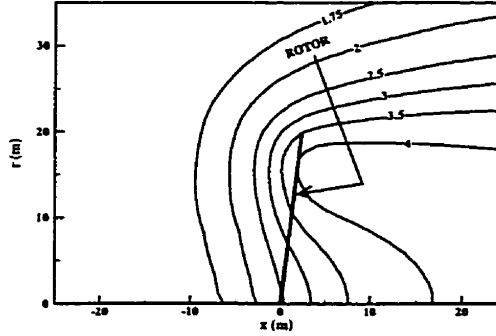


Figure 5.22 Profils d'énergie cinétique turbulente (en  $m^2/s^2$ ),  $u_0(H)=8.05$  m/s

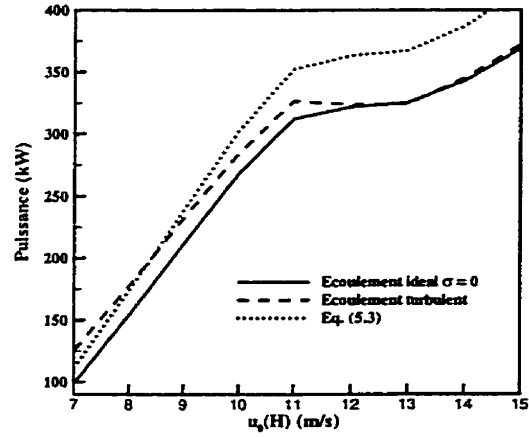


Figure 5.23 Prédictions de puissance mécanique en situations turbulentes et non-turbulentes pour l'éolienne MOD-0A

La variance  $\sigma$  peut être reliée à l'énergie cinétique turbulente par :

$$k = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (5.4)$$

La figure 5.23 présente les résultats de calculs effectués dans différentes situations de turbulence. La situation correspondant au cas idéal de turbulence nulle est effectuée en considérant seulement les effets de la viscosité moléculaire, tandis que la situation turbulente est modélisée par une rugosité de surface de 5 mm. La courbe théorique prédite par l'équation (5.3) est aussi présentée sur la figure. Quand l'éolienne est placée dans un écoulement turbulent, les échanges de quantité de mouvement sont plus élevés, et par conséquent, le débit d'air passant à travers la surface du rotor est plus grand, et les vitesses de l'écoulement sont plus fortes que dans le cas où  $\sigma = 0$ . Les vitesses relatives et les angles d'incidence vus par la pale sont donc plus élevés, et donc la puissance mécanique produite aussi. Néanmoins, pour des vitesses de vent incident trop élevées, les pales du rotor entrent en situation de décrochage aérodynamique et par conséquent, les performances de l'éolienne deviennent moins dépendantes des caractéristiques de turbulence de l'écoulement incident. Ce phénomène est observable sur la figure 5.23, où on peut voir se rejoindre

les courbes de puissance en situations laminaire et turbulente pour une vitesse de vent de 12 m/s. La comparaison entre les résultats obtenus par notre méthode et la courbe théorique prédite par l'équation (5.3) est en général assez bonne, sauf pour les vitesses de vent élevées pour lesquelles la formule ne prend pas en compte les effets du décrochage aérodynamique.

Quand la turbulence atmosphérique augmente, ces résultats montrent donc qu'il y a augmentation de la puissance produite par l'éolienne en raison de l'augmentation des échanges turbulents de quantité de mouvement dans l'écoulement. La formule 5.3 interprète au contraire l'augmentation de puissance en considérant que la turbulence influence instantanément les forces appliquées par l'écoulement sur les pales, et donc la puissance. Or comme nous l'avons déjà mentionné, les propriétés aérodynamiques de la pale ne sont pas, ou peu, affectées par la turbulence extérieure.

### 5.2.5 Application de la méthode à un problème d'interférence entre deux éoliennes MOD-0A

La formulation axisymétrique peut être utilisée pour simuler le problème posé par deux ou plusieurs éoliennes positionnées les unes derrière les autres. En effet, si le sillage d'une éolienne est prédit avec suffisamment de précision, le calcul de la performance d'une éolienne présente dans ce sillage peut alors être entrepris.

Le problème modélisé consiste en deux éoliennes MOD-0A placées l'une derrière l'autre dans un écoulement avec une vitesse incidente à hauteur de moyeu de 8.05 m/s et une rugosité de surface de 5 mm. Les dimensions du domaine de calcul sont de  $16 \times 4.2$  diamètres, 14 points sont utilisés pour mailler chacune des éoliennes et le nombre de points total du domaine est de  $218 \times 43$ . La figure 5.24 représente la puissance de chacune des éoliennes en fonction de leur espacement relatif. En ordonnée, les puissances prédites sont adimensionnalisées par la puissance d'une éolienne isolée exposée aux mêmes conditions de vent. En abscisse, l'espacement

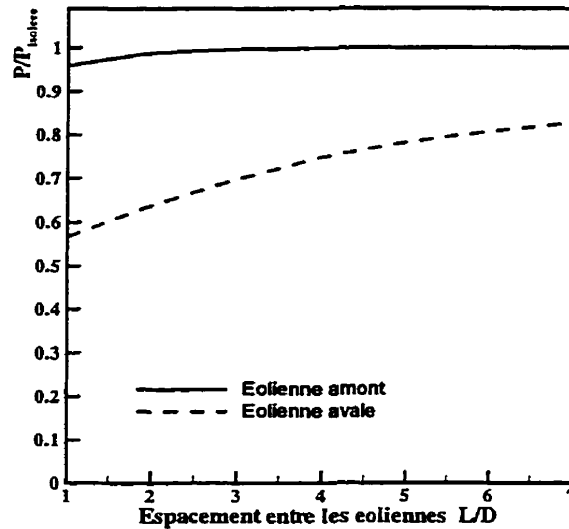


Figure 5.24 Performances de deux éoliennes MOD-0A l'une derrière l'autre

relatif entre éoliennes est adimensionnalisé par le diamètre de l'éolienne. On note ainsi que la puissance fournie par l'éolienne amont n'est presque pas influencée par la position de l'éolienne aval, sauf quand les turbines sont très proches l'une de l'autre ( $L/D < 2$ ). Pour un espacement de 7 diamètres entre les deux machines, les effets d'interférence sont tels que l'éolienne aval produit 80 % de la puissance produite par une éolienne isolée soumise aux mêmes conditions de vent.

### 5.3 Formulation tridimensionnelle: résultats

Les résultats présentés dans cette section sont exclusivement reliés à la modélisation de l'éolienne MOD-0A. Dans un premier temps, les caractéristiques de vitesse, de pression et d'énergie cinétique turbulente prédites sont analysées et comparées aux observations expérimentales réalisées dans le sillage d'éoliennes. Les cas expérimentaux de Doran et al. [34], déjà reproduits avec la formulation axisymétrique, sont

ensuite simulés avec la formulation tridimensionnelle. Enfin, le cas théorique de deux éoliennes MOD-0A positionnées l'une derrière l'autre est étudié et les effets d'interférence sur la puissance et le champ de vitesse sont présentés.

### 5.3.1 Modélisation de l'éolienne MOD-0A

La taille du domaine de calcul est de 19 diamètres selon l'axe  $x$ , de 5 diamètres selon l'axe  $y$  et de 5 diamètres selon l'axe  $z$ . Le domaine est discrétisé en  $52 \times 47 \times 25$  points. L'éolienne est placée à 7.5 diamètres de la frontière d'entrée et la surface conique du rotor est décomposée en 712 mini-surfaces. Dans le cas laminaire, cette dimension de maillage a été identifiée comme satisfaisante du point de vue de la dépendance de la solution envers la discrétisation du domaine. Compte tenu du temps de calcul beaucoup plus élevé associé à la méthode numérique tridimensionnelle par rapport à la méthode axisymétrique, ce maillage est retenu pour produire les résultats de la formulation turbulente. Par ailleurs, tous les calculs effectués l'ont été en fixant le plan du bas du domaine à une distance de  $R/10$  du sol. Des calculs ont montré qu'en fixant le plan à  $R/20$ , les résultats obtenus sont presque indiscernables de ceux obtenus en fixant le plan à  $R/10$ .

Les résultats présentés dans cette section ont été obtenus en considérant un vent incident dont l'intensité à hauteur de moyeu est de 8.05 m/s et une rugosité de surface de 5 mm.

La figure 5.25 présente l'évolution du déficit de vitesse  $\frac{u_d}{u_0(H)}$  mesuré le long de l'axe de rotation de l'éolienne en fonction de la position axiale. Le déficit de vitesse  $u_d$  est défini par:

$$u_d = u_0(z) - \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (5.5)$$

Les résultats obtenus avec les formulations axisymétrique et tridimensionnelle sont comparés. Dans le sillage proche, la méthode tridimensionnelle prédit des déficits de vitesse plus faibles que la méthode axisymétrique, tandis que dans le sillage lointain,



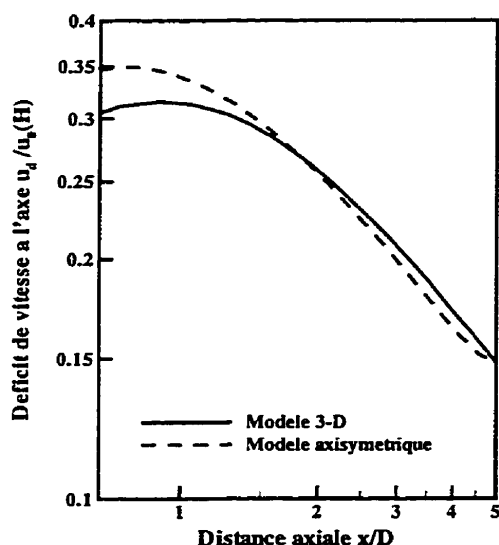


Figure 5.25 Comparaison de l'évolution du déficit axial de vitesse dans le sillage de l'éolienne MOD-0A prédite par les formulations axisymétrique et tridimensionnelle

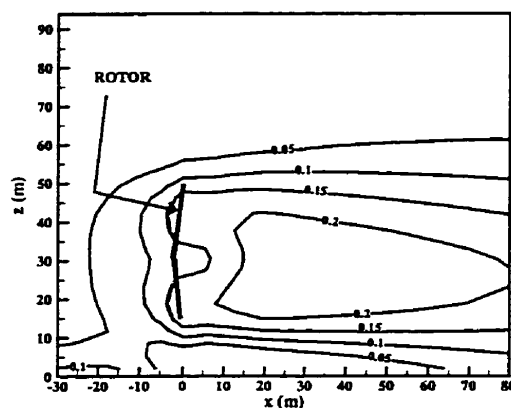


Figure 5.26 Profils de déficits de vitesse adimensionnels  $\frac{u_d}{u_0(H)}$  dans le plan ( $y=0$ ),  $u_0(H)=8.05$  m/s

les résultats sont comparables. Les approximations utilisées pour justifier l'approche axisymétrique sont probablement reliées à ces différences. En fait, l'écoulement incident, considéré uniforme et de vitesse  $u_0(H)$  dans la formulation axisymétrique, induit des forces de résistance plus fortes au travers du rotor, et l'air est globalement plus ralenti. Dans la formulation tridimensionnelle, les masses d'air situées sur l'axe de rotation du rotor évoluent entre des masses d'air inférieures plus lentes, et d'autres supérieures, plus rapides. À proximité du rotor, la distribution verticale de vitesse de la formulation tridimensionnelle conduit donc à des déficits de vitesse plus faibles que ceux prédits par la formulation axisymétrique.

Les figures 5.26 et 5.27 présentent respectivement les distributions de déficits de vitesse adimensionnels dans les plans vertical ( $y=0$ ) et horizontal ( $z=H$ ).

L'effet de la représentation du sol par le cisaillement constant  $\tau_0$  est visible à la figure 5.26, dans laquelle on peut noter, dans le premier diamètre en aval de l'éolienne, un ralentissement sensible des masses d'air proches de la frontière du bas. Les masses d'air qui traversent l'éolienne sont en effet ralenties, et le cisaillement qu'elles exercent sur les masses d'air situées entre le rotor et le sol devient plus

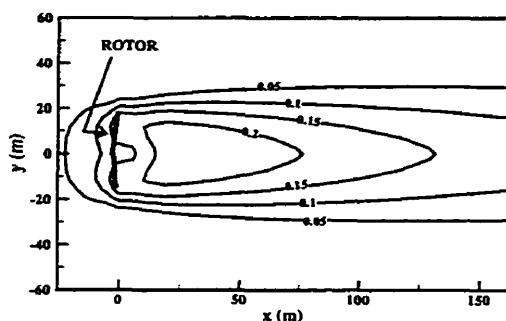


Figure 5.27 Profils de déficits de vitesse adimensionnels  $\frac{u_d}{u_0(H)}$  dans le plan ( $z=H$ ),  $u_0(H)=8.05$  m/s

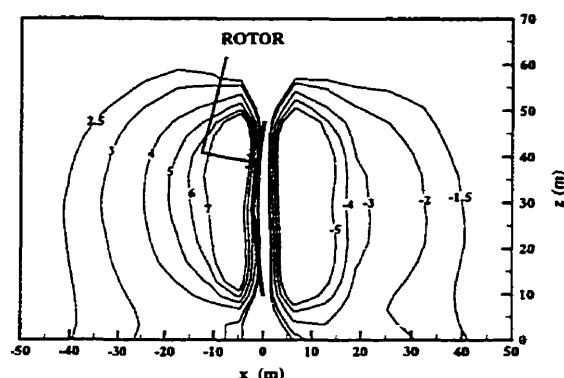


Figure 5.28 Profils de pression (en Pa) dans le plan ( $y=0$ ),  $u_0(H)=8.05$  m/s

faible que dans l'écoulement amont. Le cisaillement exercé par le sol, et représenté numériquement par la constante  $\tau_0$  induit donc un ralentissement dans l'écoulement voisin du sol moins entraîné par les couches d'air supérieures. On note à la figure 5.26 qu'après trois diamètres, ce ralentissement reste observable.

Sur les deux figures 5.26 et 5.27, on peut noter l'influence de la turbulence, qui joue un rôle essentiel dans le retour aux conditions amonts de l'écoulement. Sans cette prise en compte du transport turbulent de quantité de mouvement, l'évolution du sillage serait irréaliste. Ainsi, la figure 5.27 montre qu'après 3.5 diamètres, les vitesses mesurées dans le sillage sont toutes égales ou supérieures à 85% de leur valeur incidente.

À la figure 5.28, la distribution de pression dans le plan vertical ( $y=0$ ) est présentée. Quantitativement, les niveaux de pression correspondent à ceux prédits dans la formulation axisymétrique (voir la figure 5.21). De plus, l'action de l'éolienne sur l'écoulement, consistant à créer un saut de pression dans l'écoulement, est ici encore clairement visible.

À la figure 5.29, les profils verticaux de déficit de vitesse sont tracés pour différentes stations axiales. Chacun de ces profils est calculé dans le plan vertical

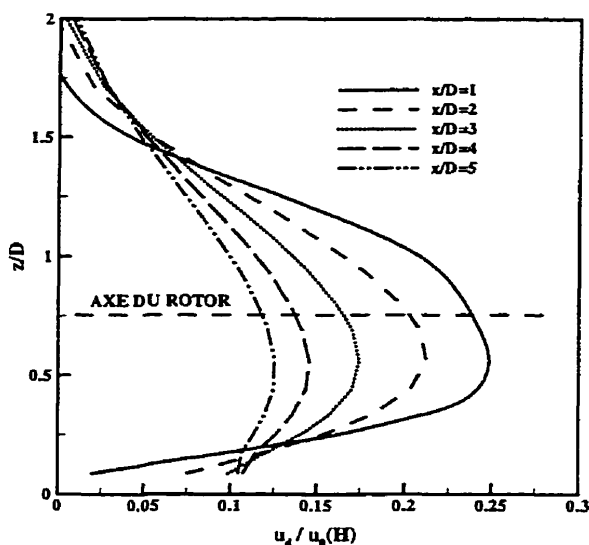


Figure 5.29 Distribution verticale de déficits de vitesse pour différentes positions axiales,  $u_0(H)=8.05$  m/s

( $y=0$ ). Pour chaque station axiale, le centre du sillage est défini comme le point pour lequel le déficit de vitesse est maximum. Sur cette figure, on peut calculer que les centres du sillage descendent vers le bas en suivant une pente d'environ  $1^\circ$ . Cette tendance est en accord qualitatif avec plusieurs observations effectuées dans le sillage d'éoliennes [11, 14, 34].

Les figures 5.30 et 5.31 présentent respectivement les distributions d'énergie cinétique turbulente dans les plans verticaux ( $x=0$ ) et ( $y=0$ ). Pour référence, la valeur de l'énergie cinétique turbulente dans l'écoulement incident est uniforme verticalement et vaut  $1.62 \text{ m}^2/\text{s}^2$ . La production d'énergie cinétique turbulente par le travail des forces de cisaillement dans l'écoulement est à l'origine de la hausse observable du niveau d'énergie cinétique turbulente, dont le maximum est d'environ  $3 \text{ m}^2/\text{s}^2$ . La figure 5.30 montre la présence de pics d'énergie cinétique turbulente le long du périmètre du disque parcouru par les pales du rotor, notamment dans la partie supérieure. De plus, les résultats exhibent une quasi-symétrie de la structure turbulente par rapport au plan ( $y=0$ ). Ces résultats sont en accord qualitatif avec

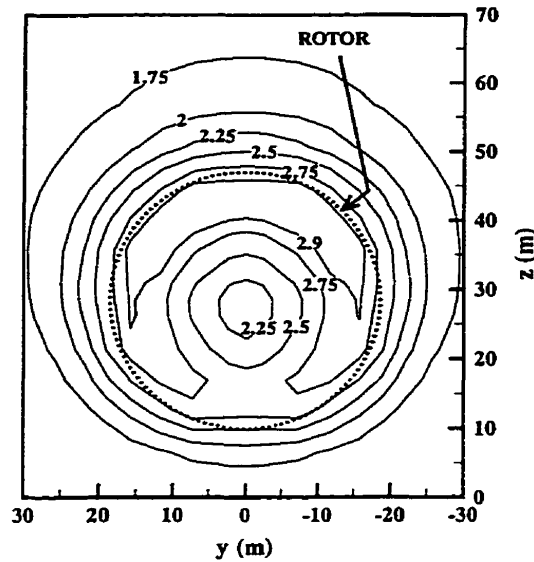


Figure 5.30 Profils d'énergie cinétique turbulente (en  $m^2/s^2$ ) dans le plan ( $x=0$ ),  $u_0(H)=8.05$  m/s

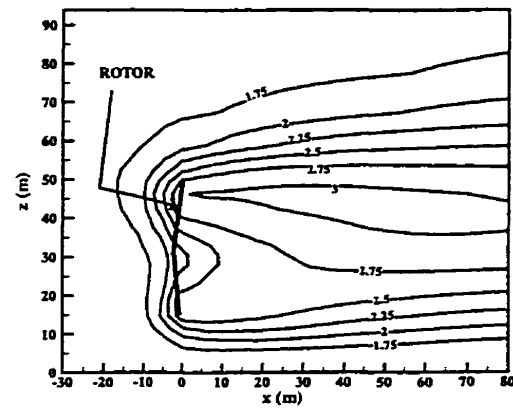


Figure 5.31 Profils d'énergie cinétique turbulente (en  $m^2/s^2$ ) dans le plan ( $y=0$ ),  $u_0(H)=8.05$  m/s

les observations de Högström et al. [13], bien que ces derniers aient observé une légère dissymétrie de la structure turbulente associée au mouvement de rotation du sillage.

La figure 5.31 montre l'évolution axiale des niveaux d'énergie cinétique turbulente. Ainsi, la production d'énergie cinétique turbulente par le travail des forces de cisaillement dans l'écoulement contribue à augmenter les niveaux d'énergie cinétique turbulente dans les voisinages amont et aval immédiats de l'éolienne. Cette production induit aussi une augmentation de la dissipation visqueuse d'énergie au niveau des petites échelles de turbulence. On remarque cependant que l'effet de la dissipation visqueuse ne se fait ressentir dans le bilan d'énergie cinétique turbulente qu'après plusieurs diamètres en aval du rotor. Ces variations ont pour conséquence d'augmenter les valeurs de viscosité turbulente, et dans le sillage proche de l'éolienne, on peut calculer que cette augmentation atteint 90% par rapport aux valeurs de viscosité turbulente de l'écoulement incident.

### 5.3.2 Simulations numériques des expérimentations de Doran et al.

Les expérimentations de Doran et al. [34], déjà reproduites dans la section consacrée à l'étude de la formulation axisymétrique, sont reprises et simulées par la formulation tridimensionnelle. Les équations (5.1) et (5.2) sont encore utilisées pour fixer les propriétés de l'écoulement incident dans le contexte d'une atmosphère en conditions thermiques neutres. Les résultats de ces simulations, ainsi que les résultats obtenus avec le modèle de Lissaman [10] sont présentés aux figures 5.32 à 5.37. Sauf dans le cas de la figure 5.32, les résultats obtenus par la formulation tridimensionnelle sont très similaires à ceux obtenus par la formulation axisymétrique. Or, sauf dans le cas des figures 5.32 et 5.37, les prédictions numériques s'écartent sensiblement des mesures expérimentales. Dans certaines situations, ces écarts peuvent atteindre 20%. Néanmoins, ce constat est moins critique en vue des résultats produits par le modèle de Lissaman qui présentent, pour les mêmes cas, des écarts importants avec les mesures expérimentales.

Ces applications de la méthode tridimensionnelle nous permettent toutefois de confirmer la pertinence d'utiliser le modèle axisymétrique pour simuler le cas d'une éolienne placée dans un écoulement non-uniforme.

Les différences entre prédictions et mesures expérimentales peuvent donc en partie s'expliquer par l'hypothèse d'une atmosphère en conditions thermiques neutres, par l'absence de prise en compte des effets de la tour, ou même par la modélisation de l'éolienne sous la forme d'une surface conique extractrice d'énergie, incapable de tenir compte des effets instationnaires de l'écoulement réel.

### 5.3.3 Cas d'interférences entre deux éoliennes

Pour illustrer l'applicabilité de la méthode à l'optimisation des performances d'un parc éolien, le cas théorique de deux éoliennes MOD-0A placées l'une derrière l'autre dans le sens du vent, avec un espacement de 1.5 diamètres, est étudié. Le domaine

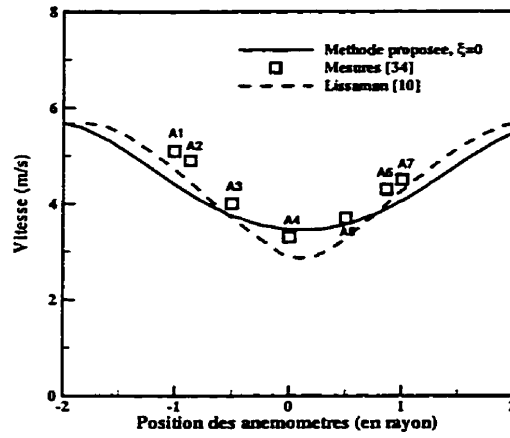


Figure 5.32 Solution tridimensionnelle,  $u_0(H) = 5.67 \text{ m/s}$ , angle d'incidence du vent =  $23^\circ$ ,  $k_0(H) = 0.54 \text{ m}^2/\text{s}^2$

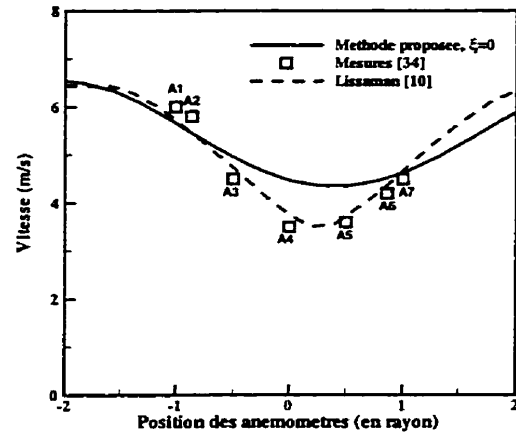


Figure 5.33 Solution tridimensionnelle,  $u_0(H) = 6.43 \text{ m/s}$ , angle d'incidence du vent =  $21^\circ$ ,  $k_0(H) = 0.7 \text{ m}^2/\text{s}^2$

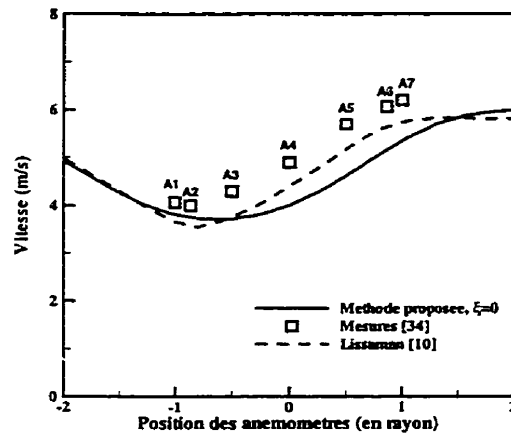


Figure 5.34 Solution tridimensionnelle,  $u_0(H) = 5.83 \text{ m/s}$ , angle d'incidence du vent =  $37^\circ$ ,  $k_0(H) = 0.76 \text{ m}^2/\text{s}^2$

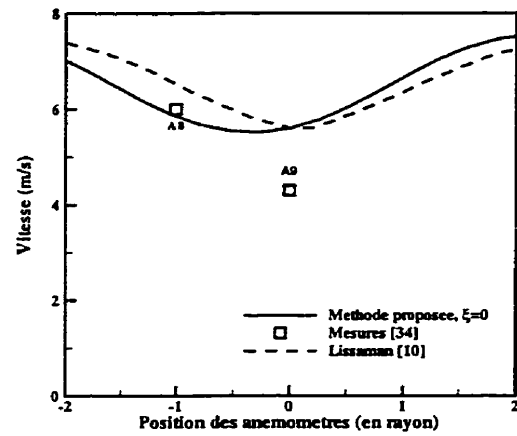


Figure 5.35 Solution tridimensionnelle,  $u_0(H) = 7.44 \text{ m/s}$ , angle d'incidence du vent =  $206^\circ$ ,  $k_0(H) = 1.8 \text{ m}^2/\text{s}^2$

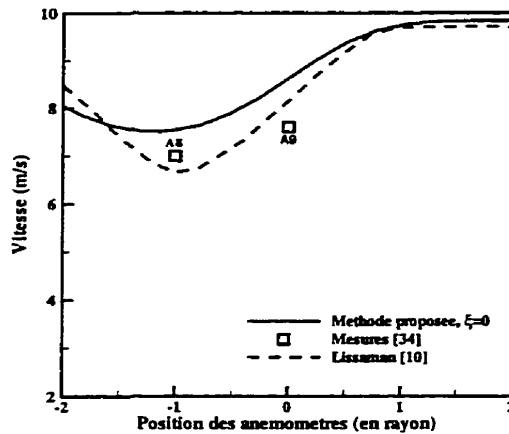


Figure 5.36 Solution tridimensionnelle,  $u_0(H) = 9.66 \text{ m/s}$ , angle d'incidence du vent =  $192^\circ$ ,  $k_0(H) = 1.35 \text{ m}^2/\text{s}^2$

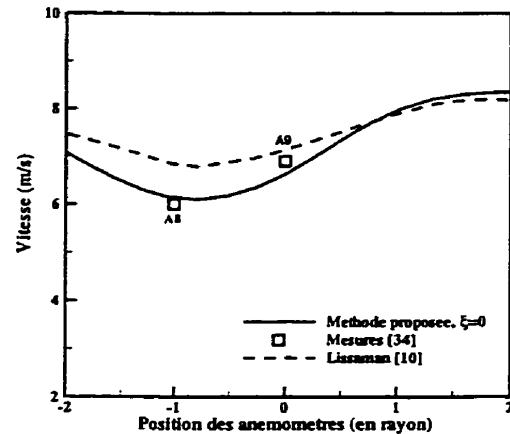


Figure 5.37 Solution tridimensionnelle,  $u_0(H) = 8.17 \text{ m/s}$ , angle d'incidence du vent =  $193^\circ$ ,  $k_0(H) = 2.9 \text{ m}^2/\text{s}^2$

utilisé possède les mêmes dimensions que celui utilisé pour mailler une éolienne isolée, sauf dans le voisinage de la deuxième éolienne où il est adapté à la présence de cette deuxième surface conique. Chacune des éoliennes est décomposée en 712 mini-surfaces.

Les conditions incidentes choisies consistent en une atmosphère en conditions neutres, avec une vitesse de vent à hauteur de moyeu de  $8.05 \text{ m/s}$  et une rugosité de surface de  $5 \text{ mm}$ .

Les figures 5.38 et 5.39 présentent respectivement les distributions de déficit de vitesse dans les plans ( $y=0$ ) et ( $z=H$ ). La comparaison avec les résultats obtenus pour une éolienne isolée (présentés à la figure 5.26) permet de noter l'influence significative de l'éolienne aval sur les caractéristiques du sillage de l'éolienne amont. Les déficits de vitesse mesurés dans le sillage proche de l'éolienne amont sont en effet sensiblement plus élevés avec la présence de l'éolienne aval. Ce résultat signifie donc qu'il n'est pas approprié d'utiliser sans correction les caractéristiques du sillage d'une éolienne isolée pour calculer les performances d'une autre éolienne placée dans son sillage: les effets d'interférence sont de nature elliptique. La figure 5.39 confirme ce résultat, en plus de montrer la symétrie du champ de vitesse par rapport au plan

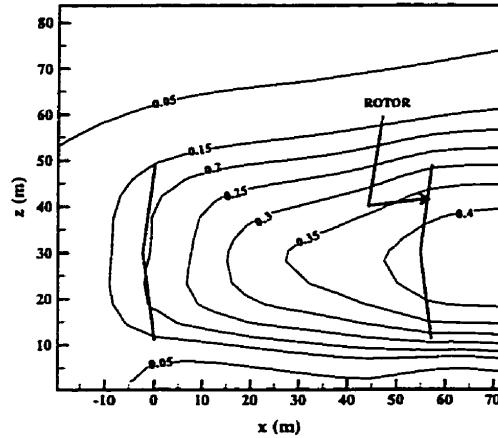


Figure 5.38 Cas d'interférence entre deux éoliennes: profils de déficits de vitesse adimensionnels  $\frac{u_d}{u_0(H)}$  dans le plan ( $y=0$ ),  $u_0(H)=8.05$  m/s

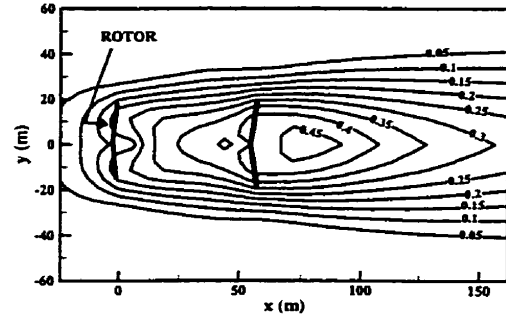


Figure 5.39 Cas d'interférence entre deux éoliennes: profils de déficits de vitesse adimensionnels  $\frac{u_d}{u_0(H)}$  dans le plan ( $z=H$ ),  $u_0(H)=8.05$  m/s

( $y=0$ ).

Pour le cas étudié, la puissance fournie par l'éolienne amont est de 175 kW tandis que celle de l'éolienne aval est de 106 kW. En comparaison, la puissance générée par une éolienne isolée et soumise aux mêmes conditions de vent est de 181 kW, ce qui signifie que les effets d'interférence entraînent une baisse de puissance de 3% pour l'éolienne amont et de 41% pour l'éolienne aval. Les calculs effectués pour étudier les effets d'interférence avec la méthode axisymétrique, présentés à la figure 5.24, évaluent à 40% les pertes de puissance pour l'éolienne aval. Ce dernier résultat, proche de celui obtenu avec la formulation tridimensionnelle, prouve l'intérêt de la formulation axisymétrique appliquée à des problèmes simples. Pour des problèmes géométriquement plus complexes dans lesquels les éoliennes ne sont plus placées selon le même axe, la formulation tridimensionnelle devient par contre le seul outil capable d'analyser ces configurations.



## CHAPITRE VI

### Conclusions

#### 6.1 Résumé du mémoire

Dans le contexte présent d'économie de l'énergie et de réduction des émissions nocives de dioxyde de carbone, ce mémoire a présenté la première étape vers une méthode complète d'optimisation des performances d'un parc éolien.

Le modèle présenté dans ce mémoire a été développé pour l'analyse des caractéristiques de l'écoulement tridimensionnel turbulent, en conditions thermiques neutres, qui se développe autour de une ou plusieurs éoliennes sur un terrain plat. Ce travail peut se résumer par les différents points, présentés ci-dessous:

- Au chapitre 1, les objectifs visés par ce travail sont présentés. L'intérêt économique du projet est soulevé, le principe de fonctionnement d'une éolienne est vu, et le plan du mémoire est présenté.
- Au chapitre 2, l'environnement dans lequel opère une éolienne est d'abord défini avec les notions de stabilité atmosphérique et de couche de surface terrestre. Les différentes contributions à la turbulence dans l'écoulement autour d'une éolienne sont présentées et les observations effectuées dans le sillage d'une éolienne sont reportées. Une revue de littérature montre que plusieurs approches ont déjà été envisagées pour modéliser la turbulence dans le sillage d'une éolienne: la plupart utilisent des fonctions empiriques pour prédire l'évolution des propriétés du sillage. Ces méthodes ont le désavantage de devoir être calibrées différemment pour chaque nouvelle éolienne. Les méthodes les plus récentes proposent de solutionner les équations de Navier-Stokes en

modélisant la turbulence par des relations algébriques ou par la résolution de deux équations de transport. Cependant, ces dernières méthodes ont été développées pour analyser seulement l'écoulement en aval d'une éolienne isolée et ne peuvent donc pas directement être appliquées au problème d'un parc éolien.

- Le chapitre 3 présente le développement mathématique de la méthode proposée. Dans un premier temps, les équations de Navier-Sokes moyennées dans le temps ainsi que les équations de l'énergie cinétique turbulente moyenne et de sa dissipation sont présentées. Ce système d'équation est incomplet. Dans un deuxième temps, les relations (vitesse, viscosité turbulente, énergie cinétique turbulente et dissipation) valides dans la couche de surface terrestre en conditions thermiques neutres sont développées. La troisième partie concerne les modèles utilisés pour répondre au problème de fermeture: le rotor est modélisé par la surface conique balayée par les pales, et son action sur l'écoulement, moyennée dans le temps, est déduite de l'analyse par élément de pale. La fermeture en turbulence utilise le concept de viscosité tourbillonnaire dont les vitesses et longueurs caractéristiques sont calculées à partir du modèle  $k-\epsilon$ . Le modèle original de Jones et Launder est adapté aux écoulements atmosphériques, et un nouveau terme est proposé dans l'équation d'énergie cinétique turbulente pour prendre en compte les effets des tourbillons de bouts de pales dans le bilan énergétique. Ce terme représente une fraction de l'énergie cinétique attribuable aux tourbillons de bouts de pales, l'autre fraction étant dissipée sous forme thermique. Par ailleurs, les termes dus aux travaux instantanés des forces exercées par le rotor sont discutés mais ne sont pas retenus dans le modèle.
- Les formulations axisymétrique et tridimensionnelle utilisées pour résoudre le modèle mathématique sont présentées au chapitre 4. Les principes de ces deux

méthodes aux éléments finis / volumes de contrôle sont vus, ainsi que les particularités liées à la modélisation numérique de l'écoulement turbulent autour d'une éolienne.

- Au chapitre 5, la méthode développée est d'abord validée dans le sillage axisymétrique d'un sphéroïde. La formulation axisymétrique est ensuite appliquée à l'éolienne MOD-0A. Dans le cas de cette dernière machine, plusieurs simulations sont effectuées et leurs résultats sont comparés aux mesures de vitesse dans le sillage effectuées par Doran et al. Les effets du terme supplémentaire ajouté à l'équation d'énergie cinétique turbulente sont étudiés en considérant les deux situations extrêmes pour lesquelles l'énergie cinétique des tourbillons de bouts de pales est soit entièrement redistribuée sous forme d'énergie cinétique turbulente, soit entièrement sous forme d'énergie thermique. Dans le premier cas, une augmentation significative des niveaux de viscosité turbulente est observée, et les vitesses prédites sont largement supérieures aux mesures expérimentales. En s'appuyant sur des observations qui indiquent la nature particulière et fortement dissipative des tourbillons de bouts de pales, il est donc proposé, dans le cas de l'éolienne MOD-0A, de considérer que l'énergie de ces tourbillons est entièrement dissipée sous forme thermique, et qu'elle ne contribue donc pas à la turbulence. La formulation axisymétrique est ensuite employée pour étudier les effets du niveau de turbulence dans l'écoulement incident sur la puissance mécanique produite par l'éolienne et elle est finalement appliquée au problème posé par deux éoliennes placées l'une derrière l'autre. La dernière section du chapitre 5 présente les résultats produits par la formulation tridimensionnelle. Qualitativement, les caractéristiques de l'écoulement autour de l'éolienne MOD-0A, prédites par le modèle, possèdent de nombreuses similarités avec la plupart des observations expérimentales effectuées dans le sillage d'une éolienne: les centres du sillage proches se déplacent vers le bas et des pics d'énergie cinétique

turbulente sont observés le long du périmètre du disque balayé par le rotor. Quantitativement, la reproduction des expérimentations de Doran et al. indiquent, pour certains cas, des écarts significatifs entre prédictions et mesures. Ces effets sont attribués à l'hypothèse de l'atmosphère en conditions neutres, à l'absence de modélisation des effets de la tour, et enfin au modèle de base choisi pour représenter le rotor, sans qu'il soit possible de trancher entre ces raisons. La méthode tridimensionnelle est aussi appliquée à un problème d'interférence entre deux éoliennes, et l'importance des effets elliptiques dans l'écoulement est mise en évidence. D'une manière générale enfin, les résultats produits par les méthodes axisymétrique et tridimensionnelle restent très voisins, ce qui assure donc l'applicabilité de la méthode axisymétrique.

## 6.2 Principales contributions du mémoire

Ce mémoire a présenté les derniers travaux accomplis dans le développement d'une méthode complète de prédiction de l'écoulement autour d'une ou plusieurs éoliennes. Ce travail s'inscrit dans la prolongation de celui d'Ammara [5], et ses principales contributions sont résumées ci-dessous:

- Le modèle  $k-\epsilon$  est proposé pour modéliser la turbulence dans l'écoulement autour d'une ou de plusieurs éoliennes. Ce choix est motivé par le besoin de reproduire les phénomènes physiques qui interviennent dans la production d'énergie cinétique turbulente dans le sillage d'une éolienne. Le modèle est évalué pour l'éolienne MOD-0A dans des conditions atmosphériques neutres. Les résultats obtenus sont qualitativement et quantitativement satisfaisants. Le modèle reproduit bien les hausses du niveau d'énergie cinétique turbulente observées dans le sillage d'éoliennes. Dans le sillage de l'éolienne MOD-0A, les vitesses prédites se comparent bien avec les mesures expérimentales.

- À partir du traitement particulier développé par Prandtl pour tenir compte qu'une partie de l'énergie cinétique retirée de l'air est transmise aux tourbillons de bouts de pales, il est proposé de considérer qu'une fraction de cette énergie contribue au bilan d'énergie cinétique turbulente. L'autre fraction de cette énergie est dissipée sous forme thermique. Dans le cas de l'éolienne MOD-0A, l'analyse des résultats permet de conclure que la fraction de l'énergie des tourbillons de bouts de pales injectée sous forme d'énergie cinétique turbulente doit être nulle afin de garantir les meilleurs résultats. Cette constatation est corroborée par des observations expérimentales qui indiquent la nature dissipative des tourbillons de bouts de pales.
- Les termes dûs aux travaux instantanés des forces exercées par l'éolienne sur l'écoulement, et qui participent aux bilans d'énergie cinétique turbulente et de dissipation sont identifiés. Leur pertinence dans le cadre de la modélisation proposée, ainsi que leurs importances relatives sont discutés.
- La formulation mathématique a d'abord été spécialisée pour pouvoir être utilisée dans un modèle numérique axisymétrique. Les résultats produits par cette première formulation ont servi dans le développement de la méthode numérique tridimensionnelle, capable de résoudre la formulation mathématique complète.
- Le modèle mathématique a été évalué en l'appliquant au cas du sillage d'un corps axisymétrique. Ensuite, les deux formulations numériques ont été employées pour prédire les caractéristiques du sillage de l'éolienne MOD-0A. Le cas théorique de deux éoliennes positionnées l'une derrière l'autre a aussi été étudié et la chute de performance prédite est réaliste. Ce dernier élément confirme l'utilité de cette méthode pour être appliquée à des problèmes de parcs éoliens.

- Les comparaisons entre les résultats fournis par les méthodes axisymétrique et tridimensionnelle pour des problèmes identiques montrent que la méthode axisymétrique produit des résultats précis, en dépit des hypothèses restrictives qui la justifient. Pour des problèmes dont le caractère n'est pas essentiellement tridimensionnel, elle reste donc une méthode pratique, avec un coût de calcul beaucoup moins élevé.

### 6.3 Recommandations et suggestions pour les futurs développements du projet

Pour continuer le développement du projet d'optimisation, il sera d'abord important de valider la méthode par rapport à d'autres mesures expérimentales: dans le cas de l'éolienne MOD-0A et d'autres éoliennes. Pour être complètes, les mesures devront porter sur les niveaux de vitesses dans le sillage d'une éolienne et aussi sur ceux d'énergie cinétique turbulente. De plus, d'autres conditions amonts de vents pourront être modélisées: telle qu'une atmosphère en conditions thermiques stables ou instables, ou un environnement extérieur différent d'un champ (collines, habitations, forêts). La modélisation de la machine pourra être complétée en tenant compte des effets de la tour sur l'écoulement. Les effets des forces centrifuges sur le retard du décollement de la couche limite, pourront être modélisés (à travers les valeurs des coefficients de portance et de traînée) quand l'éolienne est dans des conditions proches du décrochage. À ce sujet, Du et Selig [35] ont récemment proposé un modèle spécifiquement conçu pour les éoliennes. D'autres modèles de turbulence pourront être employés, et être adaptés à l'écoulement autour d'une éolienne. Plus d'informations sur la physique du problème sera nécessaire pour aller de l'avant dans ce domaine.

D'un point de vue pratique, il faudrait pouvoir vectoriser le code numérique et disposer d'une machine multiprocesseur pour le rendre plus rapide. Récemment,

le code tridimensionnel a été compilé en parallélisant automatiquement certaines boucles et a été exécuté sur la machine Sun Enterprise (16 processeurs en parallèle) du laboratoire de calcul avancé de l'École de technologie supérieure. Le temps de calcul a ainsi été divisé par trois. Soulignons aussi que la structure algorithmique des codes utilisés les rendent très propices à un niveau encore plus élevé de parallélisation.

La méthode mathématique développée pourrait aussi être utilisée pour l'étude des phénomènes instationnaires rencontrés par une éolienne: changement de la vitesse du vent incident ou variation de l'angle de calage. Si les échelles de temps de ces phénomènes sont grandes par rapport à la période de rotation du rotor, la modélisation physique du rotor présentée dans ce mémoire reste valable.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] GIPE, P., Wind Energy Comes of Age, John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [2] CHAPPELL, M.S., Recherche et développement sur l'énergie éolienne au Conseil national de recherches du Canada 1975-1985, CNRC No. 27460, juillet 1986.
- [3] MASSON, C., AMMARA, I., LECLERC, C., PARASCHIVOIU, I., Détermination de la micro-localisation optimale des aérogénérateurs dans un parc éolien, rapport final préparé pour le ministère de l'énergie et des ressources naturelles du Québec, octobre 1997.
- [4] PANOFSKY, H., DUTTON, J., Atmospheric Turbulence, John Wiley & Sons, 1984.
- [5] AMMARA, I., Optimisation de la micro-localisation des aérogénérateurs dans un parc éolien, mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, génie mécanique, en cours de rédaction.
- [6] JONES, W.P., LAUNDER, B.E., The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, 301-314, 1972.
- [7] VERMEULEN, P.E.J., A Wind Tunnel Study of the Wake of a Horizontal Axis Wind Turbine, TNO Report 78-09674, 1978.
- [8] MILBORROW, D.J., Measurement and Interpretation of Wind Turbine Wake Data, Third BWEA Wind Energy Conference, Cranfield, 1981.
- [9] VERMEULEN, P.E.J., An experimental Analysis of Wind Turbine Wakes, Third International Symposium on Wind Energy Systems, Technical University of Denmark, Lyngby, 1980.



- [10] LISSAMAN, P. B. S., Energy Effectiveness of Arbitrary Arrays of Wind Turbines, J. of Energy, Vol. 3, 323-328, 1979.
- [11] LUKEN, E., TALMON, A. M., VERMEULEN, P. E. J., Evaluation of two Mathematical Wind Turbine Models in Various Types of Flow, TNO Report 86-007, 1986.
- [12] ALFREDSSON, P.H., DAHLBERG, J.A., BARK, F.H., Some Properties of the Wake Behind Horizontal Axis Wind Turbines, Third International Symposium on Wind Energy Systems, Technical University of Denmark, Lyngby, 1980.
- [13] HÖGSTRÖM, U., ASIMAKOPOULOS, D. N., KAMBEZIDIS, H., HELMIS, C. G., SMEDMAN, A., A Field Study of the Wake behind a 2 MW Wind Turbine, Atmospheric Environment, Vol. 22, No. 4, 803-820, 1988.
- [14] TAYLOR, G.J. et al., Wake Measurements on the Nibe Windmills, 7th BWEA Conference, 1985.
- [15] ELLIOTT, D. L., CADOGAN, J. B., Effects of Wind Shear and Turbulence on Wind Turbine Power Curves, European Community Wind Energy Conference and Exhibition, Madrid, Spain, 1990.
- [16] TEMPLIN, R. J., An Estimate of the interaction of Windmills in Widespread Arrays, Report LTR-LA-171, National Research Council Canada, 1974.
- [17] NEWMAN, B.G., The Spacing of Wind Turbines in Large Arrays, Energy Conversion, Vol. 16, 169-171, 1977.
- [18] AINSLIE, J. F., Development of an Eddy-viscosity Model for Wind Turbine Wakes, 7th BWEA conference, 61-65, 1985.
- [19] CRESPO, A., MANUEL, F., MORENO, D., FRAGA, E., HERNANDEZ, J., Numerical Analysis of Wind Turbine Wakes, Workshop on Wind Energy Applications, Delphi, Greece, 1985.

- [20] LIU, M.-K., YOCKE, M.A., MYERS T.C., Mathematical Model for the Analysis of Wind-Turbine Wakes, Journal of Energy, Vol. 7, No. 1, 1983.
- [21] WILCOX, D.C., Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries Inc., La Cañada, California.
- [22] EKATERINARIS, J., SORENSEN, J.N., RASMUSSEN, F., Numerical Investigation of Airfoil Dynamic Stall in Simultaneous Harmonic Oscillatory and Translational Motion, AIAA Paper 97-0615, 1997.
- [23] RAJAGOPALAN, R.G., Inviscid Upwind Finite Difference Model for Two-Dimensional Vertical Axis Wind Turbines, Ph.D. Thesis, West Virginia University, Morgantown, 1984.
- [24] RAJAGOPALAN, R.G., FANUCCI, J.B., Finite Difference Model for the Vertical Axis Wind Turbines, Journal of Propulsion and Power, Vol. 1, 432-436, 1985.
- [25] WALKER, N.S., Performance and Optimum Design Analysis/Computation for Propeller Type Wind Turbines, Ph. D. Thesis, Oregon State University, 1976.
- [26] PRANDTL, L., Gottinger Nachr, p. 193 Appendix, 1919.
- [27] BLACKBURN, H.M., MELBOURNE, W.H., The effects of free-stream turbulence on sectional lift forces on a circular cylinder, J. Fluid Mech., Vol. 306, 267-292, 1996.
- [28] PAL, S., Wake Properties of a Flat Plate at an Angle of Attack Because of Free Stream Turbulence, AIAA Paper 81-2030, 1981.
- [29] MASSON, C., SAABAS, H.J., BALIGA, B.R., Co-Located Equal-Order Control-Volume Finite-Element Method for Two-Dimensional Axisymmetric Incompressible Fluid Flow, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 18, 1-26, 1994.